Л.Э. Генденштейн, А.П. Ершова, А.С. Ершова

# НАГЛЯДНЫЙ СПРАВОЧНИК ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

## с примерами

**для 7-11 классов**

- ФУНКЦИИ
- ГРАФИКИ
- УРАВНЕНИЯ
- НЕРАВЕНСТВА
- СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
- ПРОИЗВОДНАЯ
- ИНТЕГРАЛ
- СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

*Л. Э. Генденштейн, А. П. Ершова, А. С. Ершова*

# НАГЛЯДНЫЙ СПРАВОЧНИК ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

*с примерами*

*для 7-11 классов*

**Издание 2-е, переработанное**

**ИЛЕКСА**

**ГИМНАЗИЯ**

**Москва–Харьков**
**1997**

Справочник отличается ***максимальной наглядностью:*** каждая тема элементарного курса алгебры и начал математического анализа иллюстрируется «говорящими» графиками.

Книга поможет учащимся школ, лицеев и гимназий, ***независимо от того, по какому учебнику и по какой программе, изучается курс алгебры и начал анализа,*** наглядно представить изучаемый материал и быстро найти необходимые сведения. Такой справочник на столах учеников позволит учителю освободить время урока для решения задач.

Выпускникам и абитуриентам справочник даст возможность увидеть предмет в целом и систематизировать свои знания.

Перепечатка отдельных разделов и всего издания запрещена.
Любое коммерческое использование данного издания возможно только с разрешения издателя.

Рецензенты:

*Ю.В. Гандель,* доктор физико-математических наук, профессор Харьковского государственного университета;

*В.В. Галобородько,* учитель Академической гимназии № 45 г. Харькова

Лев Элевич Генденштейн,
Алла Петровна Ершова,
Анна Сергеевна Ершова

**Наглядный справочник по алгебре и началам анализа для 7-11 классов**

Ответственный за выпуск *Л.А. Кирик*
Художник-оформитель *М.Л. Курдюмов*
Корректор *О.Ф. Крижановский*

ЛР № 064344 от 9.12.1995. Подписано в печать 17.3.97.
Печать офсетная. Формат 60x90 1/16.
Бумага книжно-журнальная.
Тираж 100 000 экз. (1-й завод 50 000 экз.) З.457

ООО "Илекса", 121354, г. Москва, Измайловское шоссе, 48а
Творческое объединение «Гимназия», г. Харьков, ул. Тобольская, 46а

**Заказы по телефонам: в Москве (095) 365-30-55**
**в Харькове (0572) 11-80-62, 32-98-50**

Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат Комитета Российской Федерации по печати
142300, г. Чехов Московской области

ISBN 5-89237-011-9

© Генденштейн Л.Э.,
Ершова А.П.,
Ершова А.С., 1997

## СОДЕРЖАНИЕ

**ФУНКЦИИ** ..... 6
**Основные свойства функций** ..... 7
Четность и нечетность ..... 7
Периодичность ..... 8
Нули функции ..... 8
Монотонность (возрастание, убывание) ..... 9
Экстремумы (максимумы и минимумы) ..... 9
Асимптоты ..... 10
Обратные функции ..... 11
Нахождение формулы для функции, обратной данной ..... 11
**Преобразования графиков функций** ..... 12
Преобразование симметрии относительно оси $x$ ..... 12
Преобразование симметрии относительно оси $y$ ..... 13
Параллельный перенос вдоль оси $x$ ..... 14
Параллельный перенос вдоль оси $y$ ..... 15
Сжатие и растяжение вдоль оси $x$ ..... 16
Сжатие и растяжение вдоль оси $y$ ..... 17
Построение графика функции $y = |f(x)|$ ..... 18
Построение графика функции $y = f(|x|)$ ..... 18
Построение графика обратной функции ..... 19
Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций ..... 20
**Линейная функция** ..... 22
Частные случаи линейной функции (прямая пропорциональность и постоянная функция) ..... 22
Взаимное расположение графиков линейных функций ..... 22
Свойства линейной функции ..... 23
Построение графика линейной функции по двум точкам ..... 24
Построение графика линейной функции $y = kx + b$ с помощью элементарных преобразований графика функции $y = x$ ..... 25
**Квадратичная функция** ..... 26
Различные представления квадратичной функции ..... 26
Выделение полного квадрата ..... 26
Разложение на линейные множители ..... 26
Свойства квадратичной функции и ее графика ..... 27
Направление ветвей, характерные точки и ось симметрии параболы ..... 28

Построение графика квадратичной функции по направлению ветвей, характерным точкам и оси симметрии параболы (примеры) ..... 29
Построение графика квадратичной функции с помощью элементарных преобразований графика функции $y = x^2$ ..... 30
**Степенные функции с натуральными показателями степени** ..... 32
**Степенные функции с целыми отрицательными показателями степени** ..... 33
**Функции $y = \sqrt[n]{x}$** ..... 34
**Степенные функции с действительными показателями степени** ..... 35
**Показательная функция** ..... 36
**Логарифмическая функция** ..... 37
**Тригонометрические функции** ..... 38
**Обратные тригонометрические функции** ..... 42

**УРАВНЕНИЯ** ..... 44
**Линейные уравнения** ..... 45
**Квадратные уравнения** ..... 46
Неполные квадратные уравнения ..... 47
Теоремы Виета ..... 48
Формулы Виета для корней приведенного квадратного уравнения ..... 48
Уравнения, сводящиеся к квадратным ..... 49
**Иррациональные уравнения** ..... 50
**Простейшие показательные уравнения** ..... 51
**Простейшие логарифмические уравнения** ..... 51
**Простейшие тригонометрические уравнения** ..... 52
**Уравнение с двумя переменными и его график** ..... 55

**НЕРАВЕНСТВА** ..... 57
**Линейные неравенства** ..... 58
**Квадратные неравенства** ..... 59
**Метод интервалов для неравенств вида** $(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}\ldots(x - a_n)^{k_n} > 0$ 60
Применение метода интервалов для решения дробно-рациональных неравенств ..... 61
**Иррациональные неравенства** ..... 62
**Показательные неравенства** ..... 63
**Логарифмические неравенства** ..... 63
**Простейшие тригонометрические неравенства** ..... 64

## СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ..... 67

Основные методы решения систем уравнений ..... 68

Метод подстановки ..... 68

Метод сложения ..... 69

Графический метод решения системы двух уравнений с двумя неизвестными ..... 70

Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными ..... 71

## ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ ..... 72

Производная ..... 72

Геометрический смысл производной ..... 72

Уравнение касательной ..... 72

Вторая производная ..... 73

Физический смысл производной ..... 73

Правила дифференцирования ..... 73

Производная сложной функции ..... 73

Применение производной к исследованию функций ..... 74

Монотонность ..... 74

Экстремумы ..... 75

Схема применения производной для нахождения интервалов монотонности и экстремумов ..... 76

Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке ..... 77

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке ..... 77

## ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ ..... 78

Первообразная ..... 78

Основное свойство первообразных ..... 78

Неопределенный интеграл ..... 78

Правила интегрирования ..... 78

Определенный интеграл ..... 79

Связь между определенным интегралом и первообразной (формула Ньютона-Лейбница) ..... 79

Основные свойства определенного интеграла ..... 79

Геометрический смысл определенного интеграла ..... 80

Физический смысл определенного интеграла ..... 80

Вычисление площадей и объемов с помощью определенного интеграла ..... 81

## СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ ..... 82

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ..... 94

# ФУНКЦИИ*)

Числовой **функцией** называется соответствие, которое каждому числу $x$ из некоторого заданного множества сопоставляет единственное число $y$.

*Обозначение:* $y = f(x)$, где

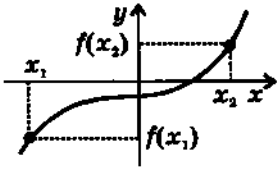
$x$ — независимая переменная (аргумент функции),

$y$ — зависимая переменная (функция).

Множество значений $x$ называется **областью определения** функции (обычно обозначается $D$).

Множество значений $y$ называется **областью значений** функции (обычно обозначается $E$).

**Графиком** функции называется множество точек плоскости с координатами $(x, f(x))$.




### СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

- ***Аналитический способ:*** функция задается с помощью математической формулы.

  *Примеры:* $y = x^2$, $y = \ln x$

- ***Табличный способ:*** функция задается с помощью таблицы.

  *Пример.*

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |

- ***Описательный способ:*** функция задается словесным описанием.

  *Пример:* функция Дирихле $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ для рациональных } x, \\ 0 \text{ для иррациональных } x. \end{cases}$

- ***Графический способ:*** функция задается с помощью графика.

*)Все параметры функций, в том числе коэффициенты многочленов, считаются действительными.

# ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

## ЧЕТНОСТЬ И НЕЧЕТНОСТЬ

Функция называется **четной**, если:

- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого $x$ из области определения

$$f(-x) = f(x).$$

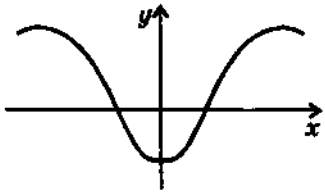



**График четной функции симметричен относительно оси $y$.**

Функция называется **нечетной**, если:

- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого $x$ из области определения

$$f(-x) = -f(x).$$

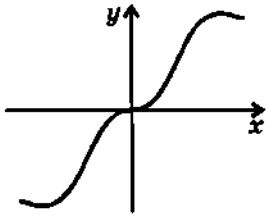
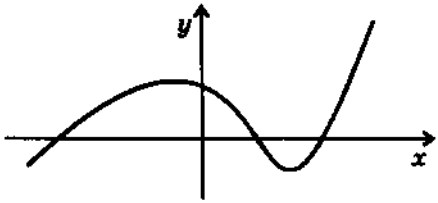



**График нечетной функции симметричен относительно начала координат.**

Многие функции не являются ни четными, ни нечетными.

***Пример графика функции, не являющейся ни четной, ни нечетной:***




***Примеры четных функций:*** $y = x^{2n}$, $n \in Z$; $y = \cos x$

***Примеры нечетных функций:*** $y = x^{2n+1}$, $n \in Z$; $y = \sin x$

***Примеры функций, не являющихся ни четными, ни нечетными:***
$y = e^x$, $y = \ln x$, $y = x - 2$, $y = (x + 1)^2$

## ПЕРИОДИЧНОСТЬ

Функция $f(x)$ называется **периодической** с периодом $T > 0$, если для любого $x$ из области определения значения $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и

$$f(x) = f(x + T) = f(x - T).$$

При этом любое число вида $Tn$, где $n \in N$, также является периодом этой функции.

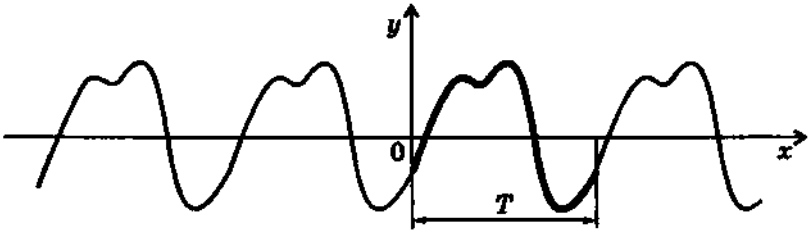


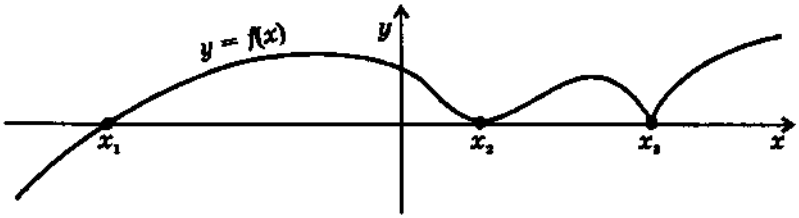

**График периодической функции состоит из неограниченно повторяющихся одинаковых фрагментов. Чтобы построить график периодической функции, строят фрагмент графика на любом отрезке длиной $T$ (например, $[0; T]$), а затем производят последовательные параллельные переносы фрагмента графика на $T$, $2T$, $3T$ и т.д. вдоль оси $x$ (вправо и влево).**

## НУЛИ ФУНКЦИИ

**Нулем функции** $y = f(x)$ называется такое значение аргумента $x_0$, при котором функция обращается в нуль:

$$f(x_0) = 0.$$

**В нуле функции ее график имеет общую точку с осью $x$.**

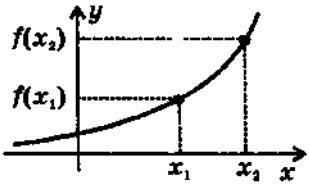



**$x_1$, $x_2$, $x_3$ — нули функции $y = f(x)$**

## МОНОТОННОСТЬ (ВОЗРАСТАНИЕ, УБЫВАНИЕ)

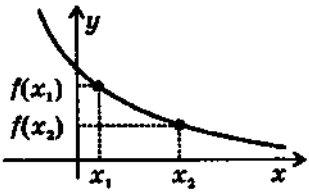
**Функция** $y = f(x)$ называется **возрастающей** на интервале $(a; b)$, если для любых $x_1$ и $x_2$ из этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство

$$f(x_1) < f(x_2).$$




**Функция** $y = f(x)$ называется **убывающей** на интервале $(a; b)$, если для любых $x_1$ и $x_2$ из этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство

$$f(x_1) > f(x_2).$$

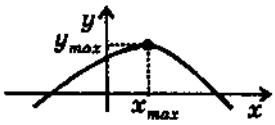



## ЭКСТРЕМУМЫ (МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ)

Внутренняя точка $x_{max}$ области определения называется **точкой максимума**, если для всех $x$ из некоторой окрестности этой точки справедливо неравенство:

$$f(x) < f(x_{max}).$$

Значение $y_{max} = f(x_{max})$ называется **максимумом** этой функции.



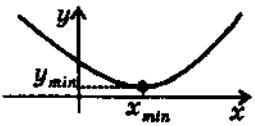

$x_{max}$ — точка максимума

$y_{max}$ — максимум

Внутренняя точка $x_{min}$ области определения называется **точкой минимума**, если для всех $x$ из некоторой окрестности этой точки справедливо неравенство:

$$f(x) > f(x_{min}).$$

Значение $y_{min}$ $f(x_{min})$ называется **минимумом** этой функции.



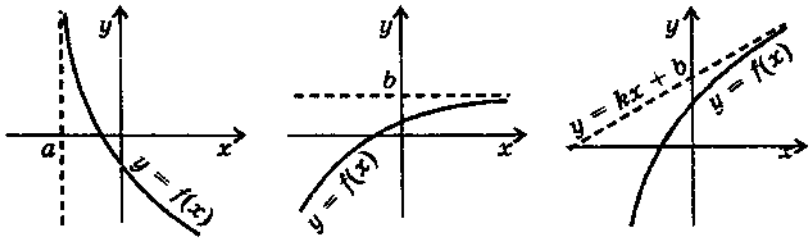

$x_{min}$ — точка минимума

$y_{min}$ — минимум

## АСИМПТОТЫ

Если график функции $y = f(x)$ имеет бесконечную ветвь (ветви), у графика могут быть асимптоты.

**Асимптотой** графика называется прямая, к которой неограниченно приближается точка графика при удалении этой точки по бесконечной ветви.




| Вертикальная асимптота $x = a$ | Горизонтальная асимптота $y = b$ | Наклонная асимптота $y = kx + b$ |
|---|---|---|

Прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой**, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ (предел справа) или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ (предел слева) равен бесконечности.

Прямая $y = b$ является **горизонтальной асимптотой**, если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \text{ или } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

Прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой**, если существуют конечные пределы

$$k = \lim \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim(f(x) - kx)$$

либо при $x \to \infty$, либо при $x \to -\infty$.

## ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

Понятие обратной функции применимо к функциям, обладающим следующим свойством: *каждому* значению $y$ из области значений функции соответствует *единственное* значение $x$ из области определения этой функции.

*Замечание.* Для многих функций это свойство выполняется лишь на части области определения, в частности, на любом промежутке монотонности (для функции $y = x^2$ таким промежутком является, например, луч $[0; \infty)$, для функции $y = \sin x$ — отрезок $[-\pi/2; \pi/2]$).

Функция $g$ называется **обратной** для функции $f$, если каждому $y$ из области значений функции $f$ функция $g$ ставит в соответствие такое $x$ из области определения функции $f$, что $y = f(x)$. Таким образом, если $y = f(x)$, то $x = g(y)$.

Функции $f$ и $g$ являются **взаимно обратными.**

- Область определения функции $f$ является областью значений функции $g$, а область значений функции $f$ является областью определения функции $g$.
- Графики взаимно обратных функций симметричны друг другу относительно прямой $y = x$ (построение графика обратной функции см. на стр. 19).

***Примеры взаимно обратных функций:***

$y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$

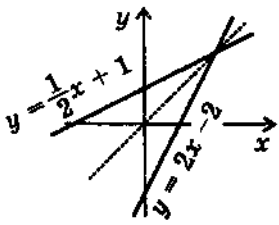
### НАХОЖДЕНИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ, ОБРАТНОЙ ДАННОЙ

- Пользуясь формулой $y = f(x)$, следует выразить $x$ через $y$, а в полученной формуле $x = g(y)$ заменить $x$ на $y$, а $y$ на $x$.

***Пример.*** **Найти формулу для функции, обратной функции**

$$y = \frac{1}{2}x + 1.$$

**Выражение $x$ через $y$: $x = 2y - 2$.**
**Замена $x$ на $y$, $y$ на $x$ дает: $y = 2x - 2$.**
**Результат: функция $y = 2x - 2$ является обратной для функции $y = \frac{1}{2}x + 1$.**



# ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ $x$

$$f(x) \to -f(x)$$

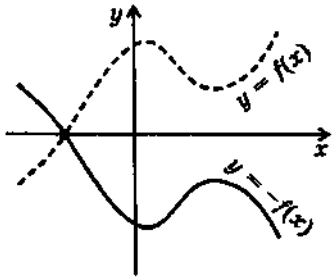
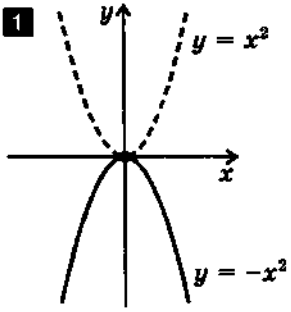



График функции $y = -f(x)$ получается преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно оси $x$.

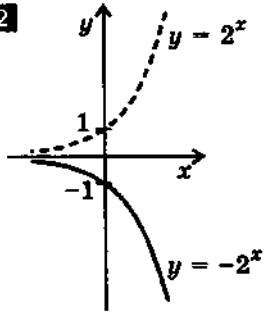
*Замечание.* Точки пересечения графика с осью $x$ остаются неизменными.

***Примеры:***

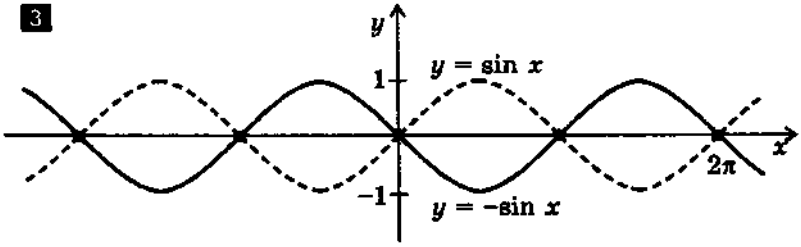
**1**




**2**




**3**



## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ $y$

## $f(x) \to f(-x)$

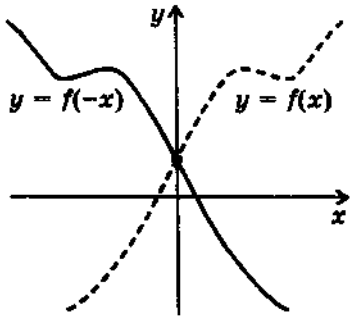
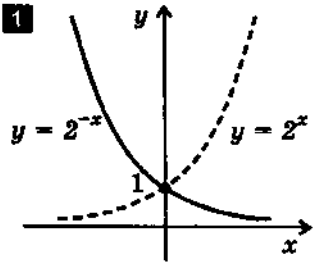



График функции $y = f(-x)$ получается преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно оси $y$.

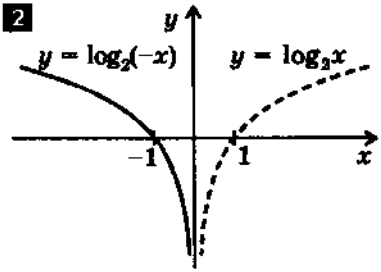
*Замечание.* Точка пересечения графика с осью $y$ остается неизменной.

***Примеры:***

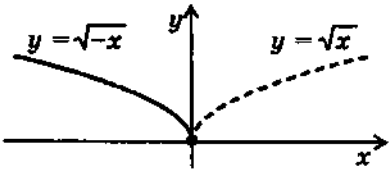
**1**



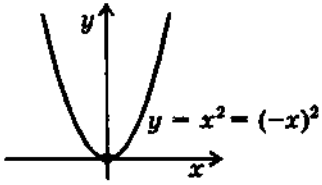

**2**




**3**




**4**




*Замечание 1.* График четной функции (см. стр. 7) не изменяется при отражении относительно оси $y$, поскольку для четной функции $f(-x) = f(x)$. ***Пример***: $(-x)^2 = x^2$.

*Замечание 2.* График нечетной функции (см. стр. 7) изменяется одинаково как при отражении относительно оси $x$, так и при отражении относительно оси $y$, поскольку для нечетной функции $f(-x) = -f(x)$. ***Пример***: $\sin(-x) = -\sin x$.

## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВДОЛЬ ОСИ $x$

$$f(x) \to f(x-a)$$

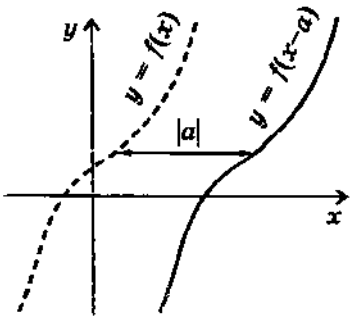
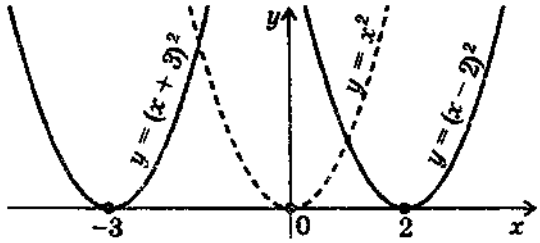


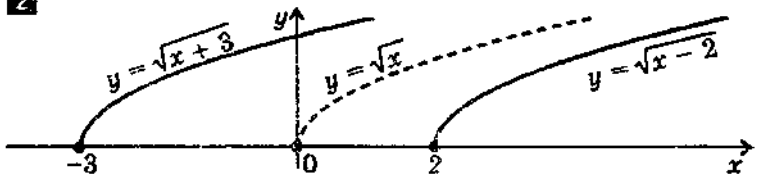

График функции $y = f(x - a)$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси $x$ на $|a|$ вправо при $a > 0$ и влево при $a < 0$.

***Примеры:***

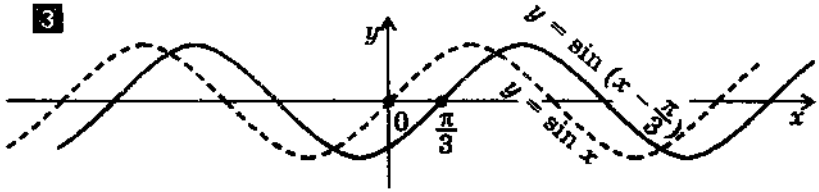
**1**




**2**




**3**




***Замечание.*** **График периодической функции (см. стр. 8) с периодом $T$ не изменяется при параллельных переносах вдоль оси $x$ на $nT$, $n \in Z$.**

## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВДОЛЬ ОСИ $y$

## $f(x) \to f(x) + b$

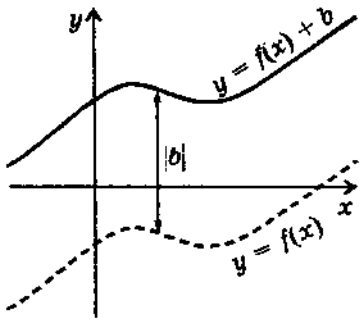
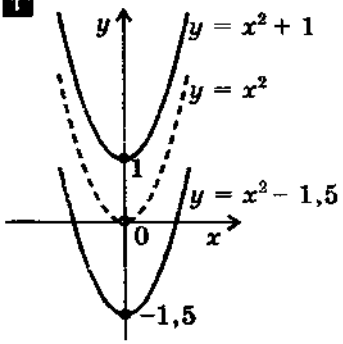


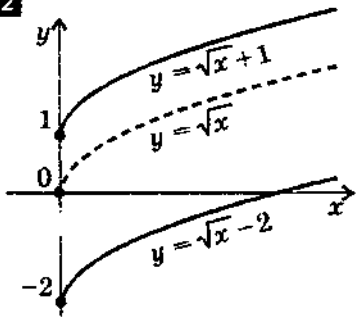

График функции $y = f(x) + b$ получается параллельным переносом графика функции $y$ $f(x)$ вдоль оси $y$ на $|b|$ вверх при $b > 0$ и вниз при $b < 0$.

***Примеры:***

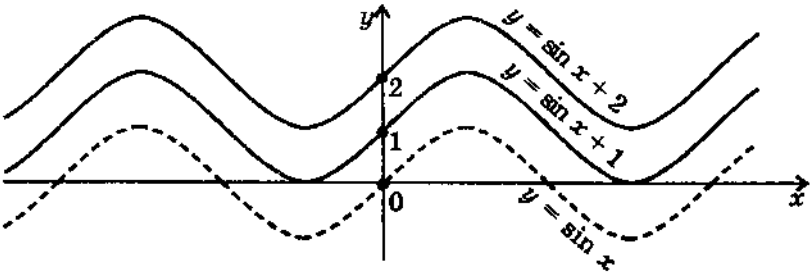
**1**




**2**




**3**



## СЖАТИЕ И РАСТЯЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ $x$

## $f(x) \to f(\alpha x)$, где $\alpha > 0$

$\alpha > 1$

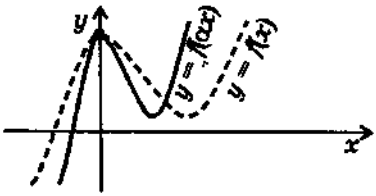



График функции $y = f(\alpha x)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси $x$ в $\alpha$ раз.

$0 < \alpha < 1$

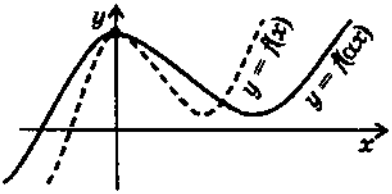
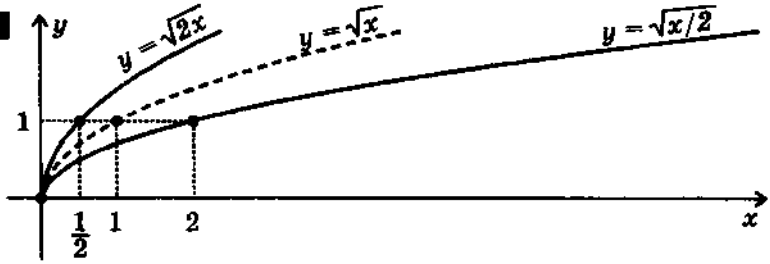



График функции $y = f(\alpha x)$ получается растяжением графика функции $y$ $f(x)$ вдоль оси $x$ в $1/\alpha$ раз.

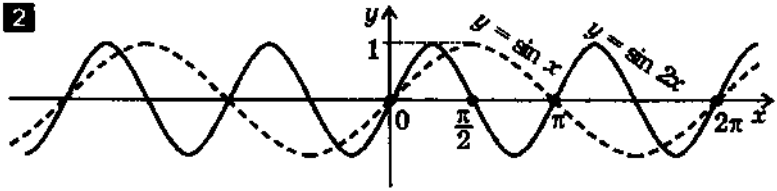
*Замечание.* Точки пересечения графика с осью $y$ остаются неизменными.

***Примеры:***

**1**




**2**



## СЖАТИЕ И РАСТЯЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ $y$

## $f(x) \to kf(x)$, где $k > 0$

$k > 1$

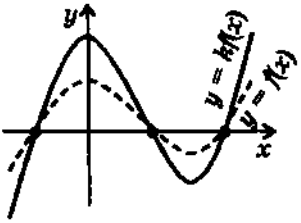



График функции $y = kf(x)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси $y$ в $k$ раз.

$0 < k < 1$

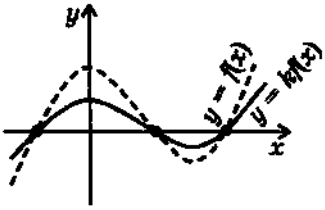
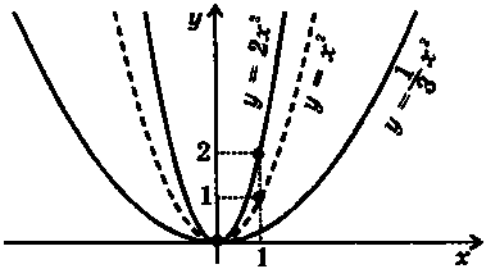



График функции $y = kf(x)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси $y$ в $1/k$ раз.

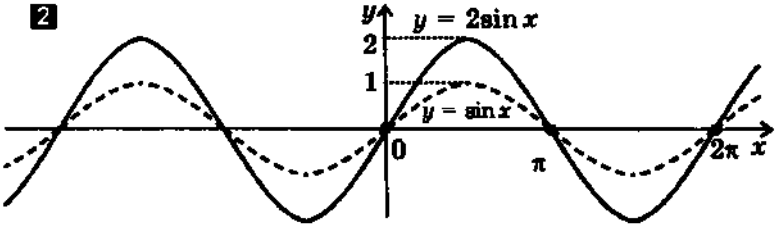
*Замечание.* Точки пересечения графика с осью $x$ остаются неизменными.

***Примеры:***

**1**




**2**



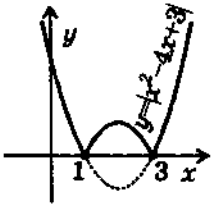
## ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = |f(x)|$

Части графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси $x$ и на оси $x$, остаются без изменения, а лежащие ниже оси $x$ — симметрично отражаются относительно этой оси (вверх).

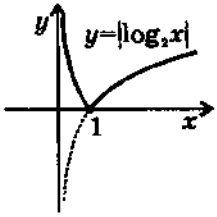
*Замечание.* Функция $y = |f(x)|$ неотрицательна (ее график расположен в верхней полуплоскости).

*Примеры:*

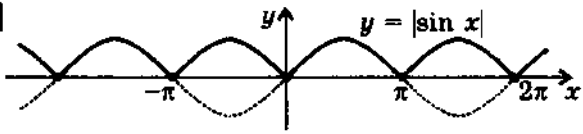
1




2




3



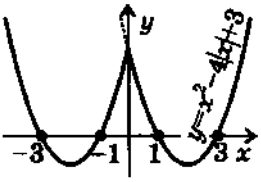

## ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(|x|)$

Часть графика функции $y = f(x)$, лежащая левее оси $y$, удаляется, а часть, лежащая правее оси $y$ — остается без изменения и, кроме того, симметрично отражается относительно оси $y$ (влево). Точка графика, лежащая на оси $y$, остается неизменной.

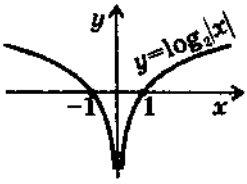
*Замечание.* Функция $y = f(|x|)$ четная (ее график симметричен относительно оси $y$).

*Примеры:*

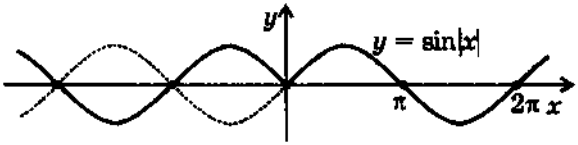
1




2




3



## ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

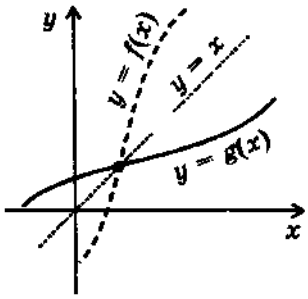
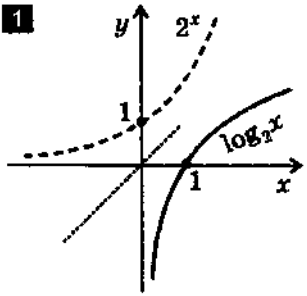



График функции $y = g(x)$, обратной для функции $y = f(x)$, можно получить преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$.

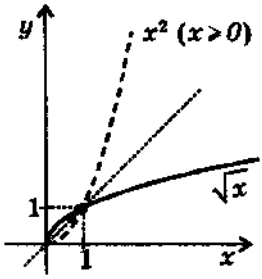
*Замечание.* Описанное построение можно производить только для функции, имеющей обратную (см. стр. 11).

***Примеры графиков взаимно обратных функций.***

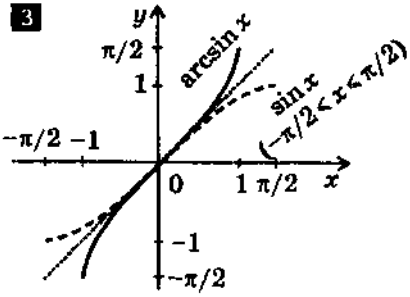
1



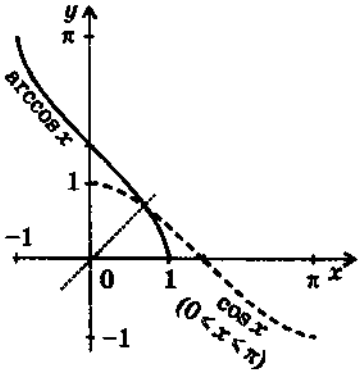

2




3

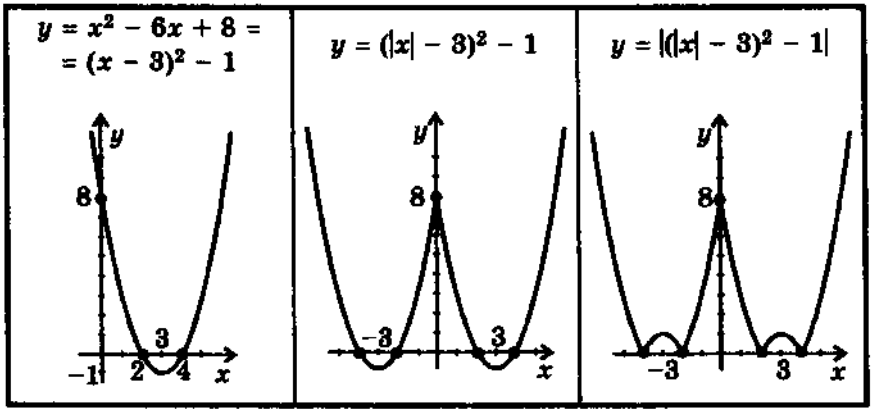



4

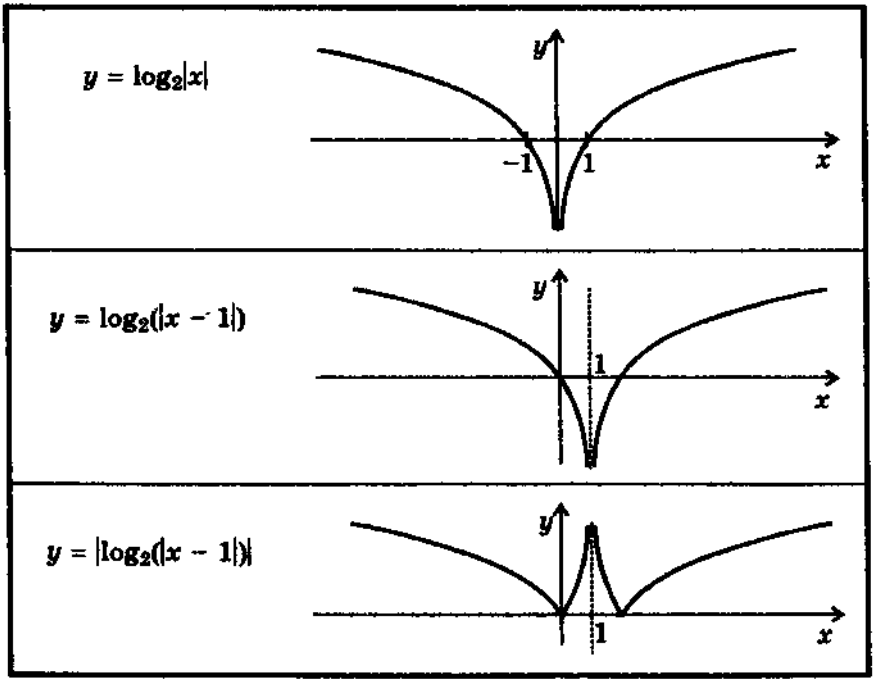


## ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

$$y = |x^2 - 6|x| + 8| = ||x|^2 - 6|x| + 8| = |(|x| - 3)^2 - 1|$$

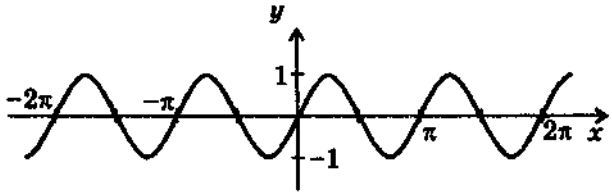



$$y = |\log_2(|x - 1|)|$$

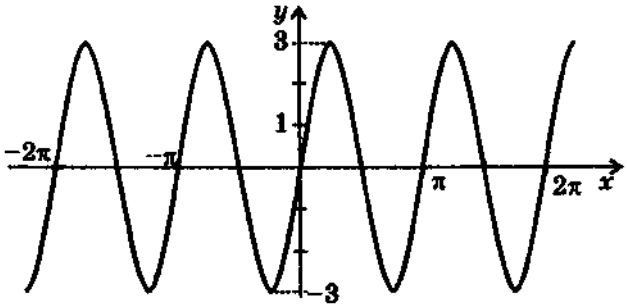


$$y = |3\sin 2x| - 1$$

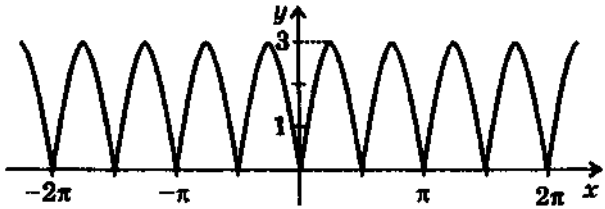
$y = \sin 2x$



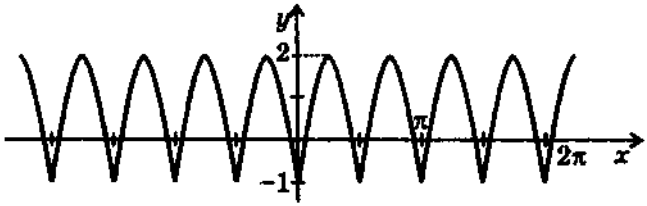

$y = 3\sin 2x$




$y = |3\sin 2x|$




$y = |3\sin 2x| - 1$



# ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

$y = kx + b$, где $k$, $b$ — действительные числа.

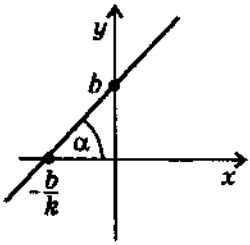



График — **прямая**.

Угловой коэффициент

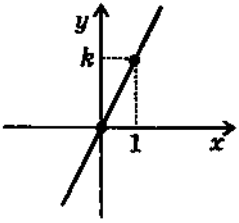
$k = \operatorname{tg} \alpha$

$b$ — ордината точки пересечения графика с осью $y$.

## ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

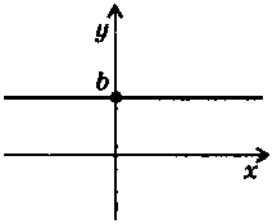
Прямая пропорциональность

$y = kx$



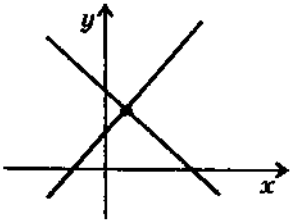

Постоянная функция

$y = b$

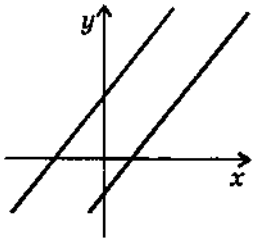



## ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ГРАФИКОВ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Если $k_1 \neq k_2$, графики функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ пересекаются в одной точке.




Если $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$, графики функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ являются параллельными прямыми.



## СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ $y = kx + b$

- *Область определения:* $R$

- *Область значений:*

  при $k \neq 0$ $R$

  при $k = 0$ $\{b\}$

- *Четность, нечетность:*

  если $k \neq 0$, $b \neq 0$, то функция не является ни четной, ни нечетной

  если $k \neq 0$, $b = 0$, то функция нечетная

  если $k = 0$, $b \neq 0$, то функция четная

  если $k = 0$, $b = 0$, то функция тождественно равна нулю, то есть является одновременно четной и нечетной

- *Нули:*

  если $k \neq 0$, то $y = 0$ при $x = -b/k$

  если $k = 0$, $b \neq 0$, то нулей нет

  если $k = 0$, $b = 0$, то $y = 0$ при $x \in R$

- *Промежутки знакопостоянства:*

  если $k > 0$, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (-b/k;\ \infty) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty;\ -b/k) \end{cases}$

  если $k < 0$, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (-\infty;\ -b/k) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-b/k;\ \infty) \end{cases}$

  если $k = 0$, $b > 0$, то $y > 0$ при $x \in R$

  если $k = 0$, $b < 0$, то $y < 0$ при $x \in R$

  если $k = 0$, $b = 0$, то $y = 0$ при $x \in R$

- *Промежутки монотонности:*

  если $k > 0$, то функция возрастает при $x \in R$

  если $k < 0$, то функция убывает при $x \in R$

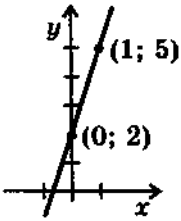
  если $k = 0$, то функция постоянна при $x \in R$

- *Экстремумов* нет

## ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ ПО ДВУМ ТОЧКАМ

Часто удобно выбирать $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Соответствующие точки прямой $(0;\ b)$ и $(1;\ b + k)$.

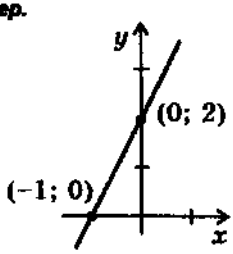
***Пример.***




$y = 3x + 2$
Если $x_1 = 0$, то $y_1 = 2$;
если $x_2 = 1$, то $y_2 = 5$.
Через точки (0; 2) и (1; 5) провести прямую.

Если $k \neq 0$, $b \neq 0$, можно выбирать точки $(0;\ b)$ и $(-b/k;\ 0)$ на осях координат.

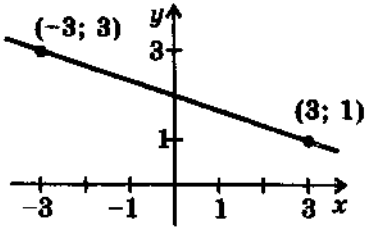
***Пример.***




$y = 2x + 2$
Если $x_1 = 0$, то $y_1 = 2$;
если $y_2 = 0$, то $x_2 = -1$.
Через точки (0; 2) и (−1; 0) провести прямую.

Если коэффициент перед $x$ дробный, удобно выбирать $x_1$ и $x_2$ так, чтобы $y_1$ и $y_2$ были целыми.

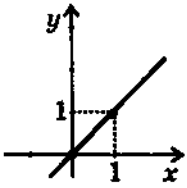
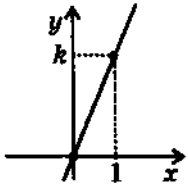
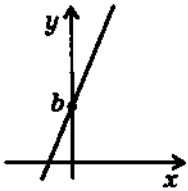
***Пример.***




$y = -\frac{1}{3}x + 2$
Если $x_1 = 3$, то $y_1 = 1$;
если $x_2 = -3$, то $y_2 = 3$.
Через точки (3; 1) и (−3; 3) провести прямую.

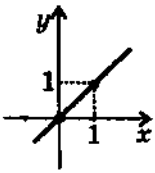
## ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ $y = kx + b$ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = x$

*Этапы преобразования графика*

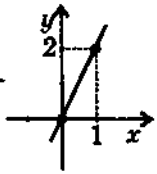
| 1. $y = x$ | 2. $y = kx$ | 3. $y = kx + b$ |
|---|---|---|
|   |   |   |
| **Построить график функции $y = x$.** | **Произвести растяжение (при $\lvert k\rvert > 1$) или сжатие (при $\lvert k\rvert < 1$) графика вдоль оси $y$ (если $k < 0$, произвести, кроме того, зеркальное отражение относительно любой из координатных осей).** | **Произвести параллельный перенос графика вдоль оси $y$ на $\lvert b\rvert$ (вверх при $b > 0$, вниз при $b < 0$).** |

***Примеры:***

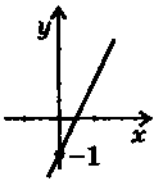
**1. $y = 2x - 1$**




$y = x$

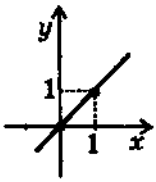



$y = 2x$

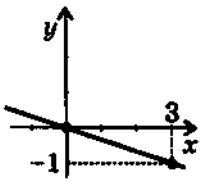



$y = 2x - 1$

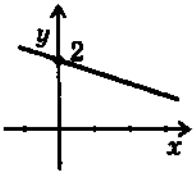
**2. $y = -x/3 + 2$**




$y = x$




$y = -x/3$




$y = -x/3 + 2$

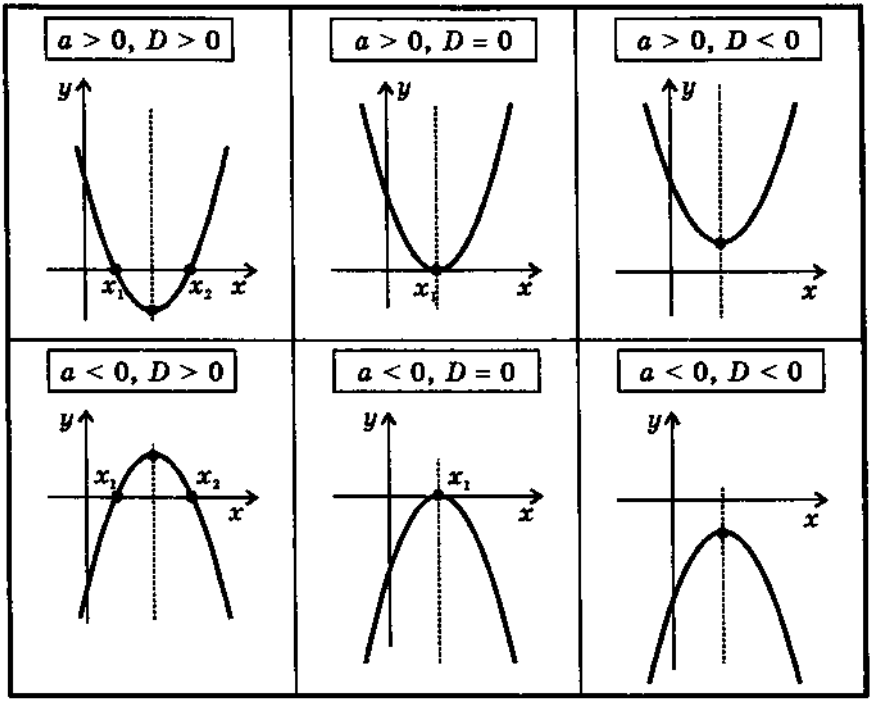
# КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ где } a \neq 0.$$

**График — парабола.**

**Свойства функции и вид ее графика определяются, в основном, значениями коэффициента $a$ и *дискриминанта***

$$D = b^2 - 4ac.$$




## РАЗЛИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

**1. ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТА**

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

**2. РАЗЛОЖЕНИЕ НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ**

| | |
|---|---|
| при $D > 0$ | $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ |
| при $D = 0$ | $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ |
| при $D < 0$ | разложить на множители нельзя |

## СВОЙСТВА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ $y = ax^2 + bx + c$

- *Область определения:* $R$

- *Область значений:*

  при $a > 0$ $[-D/(4a); \infty)$

  при $a < 0$ $(-\infty; -D/(4a)]$

- *Четность, нечетность:*

  при $b = 0$ функция четная

  при $b \neq 0$ функция не является ни четной, ни нечетной

- *Нули:*

  при $D > 0$ два нуля: $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

  при $D = 0$ один нуль: $x_1 = -b/(2a)$

  при $D < 0$ нулей нет

- *Промежутки знакопостоянства:*

  если $a > 0$, $D > 0$, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty) \\ y < 0 \text{ при } x \in (x_1; x_2) \end{cases}$

  если $a > 0$, $D = 0$, то $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; \infty)$

  если $a > 0$, $D < 0$, то $y > 0$ при $x \in R$

  если $a < 0$, $D > 0$, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (x_1; x_2) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty) \end{cases}$

  если $a < 0$, $D = 0$, то $y < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; \infty)$

  если $a < 0$, $D < 0$, то $y < 0$ при $x \in R$

- *Промежутки монотонности:*

  при $a > 0$ $\begin{cases} \text{функция возрастает при } x \in [-b/(2a); \infty) \\ \text{функция убывает при } x \in (-\infty; -b/(2a)] \end{cases}$

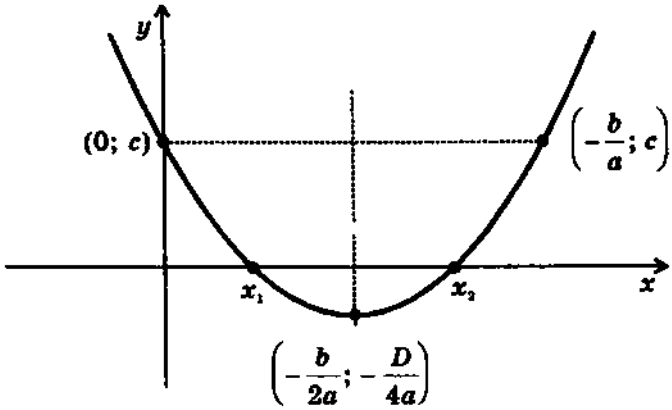
  при $a < 0$ $\begin{cases} \text{функция возрастает при } x \in (-\infty; -b/(2a)] \\ \text{функция убывает при } x \in [-b/(2a); \infty) \end{cases}$

- *Экстремумы:*

  при $a > 0$ $x_{min} = -b/(2a)$; $y_{min} = -D/(4a)$

  при $a < 0$ $x_{max} = -b/(2a)$; $y_{max} = -D/(4a)$

## НАПРАВЛЕНИЕ ВЕТВЕЙ, ХАРАКТЕРНЫЕ ТОЧКИ И ОСЬ СИММЕТРИИ ПАРАБОЛЫ, являющейся графиком функции $y = ax^2 + bx + c$




- *Направление ветвей параболы:*
  при $a > 0$ ветви направлены вверх
  при $a < 0$ ветви направлены вниз
- *Координаты вершины параболы:* $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$
- *Ось симметрии параболы* — прямая $x = -\frac{b}{2a}$
- *Точки пересечения (касания) графика с осью x:*

  $D > 0$: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ (точки пересечения)

  $D = 0$: $x_1 = -b/(2a)$ (точка касания)

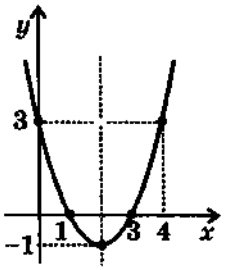
  $D < 0$: общих точек у графика с осью $x$ нет
- *Точка пересечения графика с осью y:* $(0; c)$, симметричная ей точка относительно оси параболы $(-b/a; c)$

Для построения графика квадратичной функции используют некоторые из указанных характеристик. Например, если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, удобно использовать координаты вершины параболы и координаты двух точек пересечения параболы с осью $x$.

## ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ВЕТВЕЙ, ХАРАКТЕРНЫМ ТОЧКАМ И ОСИ СИММЕТРИИ ПАРАБОЛЫ

***Примеры:***

$y = x^2 - 4x + 3$




1. *Ветви направлены вверх*, т.к. $a = 1 > 0$.
2. *Координаты вершины* (2; –1), т.к.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2;$$

$$y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$$

3. *Ось симметрии* параболы

$$x = -\frac{b}{2a} = 2.$$

4. *Координаты точек пересечения с осью x:*

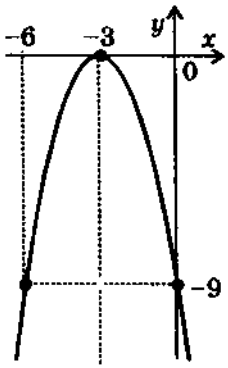
$$(x_1;\ 0) = (1;\ 0) \text{ и } (x_2;\ 0) = (3;\ 0).$$

5. *Координаты точки пересечения с осью y:*

$$(0;\ c) = (0;\ 3);$$

*симметричная ей точка относительно оси параболы:* $\left(-\frac{b}{a};\ c\right) = (4;\ 3)$.

$y = -x^2 - 6x - 9$




1. *Ветви* направлены *вниз*, т.к. $a = -1 < 0$.
2. *Координаты вершины* (–3; 0), т.к.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{-2} = -3;$$

$$y(3) = -(-3)^2 - 6 \cdot (-3) - 9 = 0.$$

3. *Ось симметрии* параболы $x = -\frac{b}{2a} = -3$.
4. *Координаты точки касания с осью x:*

$$(x_1;\ 0) = (-3;\ 0).$$

5. *Координаты точки пересечения с осью y:*

$$(0;\ c) = (0;\ -9);$$

*симметричная ей точка относительно оси параболы:* $\left(-\frac{b}{a};\ c\right) = (-6;\ -9)$.

## ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = x^2$

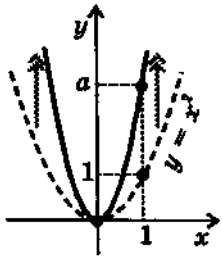
С помощью выделения полного квадрата (см. стр. 26) любую квадратичную функцию можно представить в виде:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x - m)^2 + n,$$

$$\text{где } m = -\frac{b}{2a},\ n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

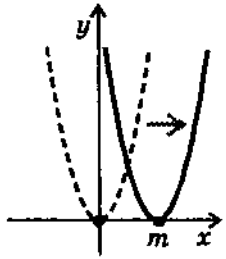
Это позволяет построить график квадратичной функции с помощью элементарных преобразований графика функции $y = x^2$.

*Этапы построения графика функции $y = a(x - m)^2 + n$:*



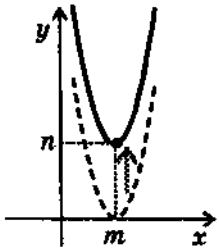

1. *Растяжение* графика $y = x^2$ вдоль оси $y$ в $|a|$ раз (при $|a| < 1$ — это сжатие в $1/|a|$ раз).
   Если $a < 0$, произвести, кроме того, зеркальное отражение графика относительно оси $x$ (ветви параболы будут направлены вниз).

   *Результат:* график функции $y = ax^2$.




2. *Параллельный перенос* графика функции $y = ax^2$ вдоль оси $x$ на $|m|$ (вправо при $m > 0$ и влево при $m < 0$).

   *Результат:* график функции $y = a(x - m)^2$.

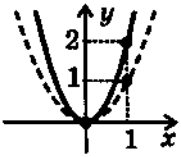



3. *Параллельный перенос* графика функции $y = a(x - m)^2$ вдоль оси $y$ на $|n|$ (вверх при $n > 0$ и вниз при $n < 0$).

   *Результат:* график функции $y = a(x - m)^2 + n$.

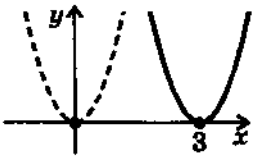
***Примеры:***

$$y = 2x^2 - 12x + 19 = 2(x-3)^2 + 1$$



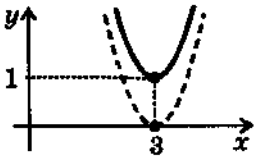

- - - - - $y = x^2$
——— $y = 2x^2$

**1. Растяжение графика функции $y = x^2$ вдоль оси $y$ в 2 раза.**




- - - - - $y = 2x^2$
——— $y = 2(x-3)^2$

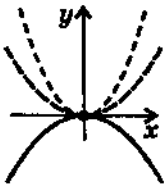
**2. Параллельный перенос графика функции $y = 2x^2$ вдоль оси $x$ на 3 вправо.**




- - - - - $y = 2(x-3)^2$
——— $y = 2(x-3)^2+1$

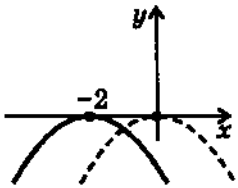
**3. Параллельный перенос графика функции $y = 2(x-3)^2$ вдоль оси $y$ на 1 вверх.**

$$y = -\frac{x^2}{2} - 2x - 3 = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$$



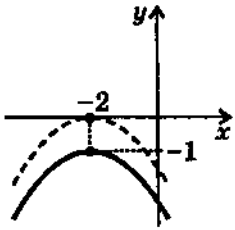

- - - $y = x^2$
- - - $y = x^2/2$
——— $y = -x^2/2$

**1. Сжатие графика функции $y = x^2$ вдоль оси $y$ в 2 раза и преобразование симметрии относительно оси $x$.**




- - - $y = -x^2/2$
——— $y = -(x+2)^2/2$

**2. Параллельный перенос графика функции $y = -x^2/2$ вдоль оси $x$ на 2 влево.**



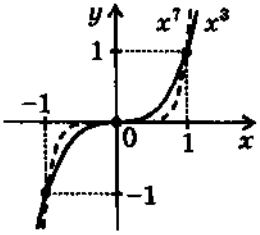

- - - $y = -(x+2)^2/2$
——— $y = -(x+2)^2/2 - 1$

**3. Параллельный перенос графика функции $y = -(x+2)^2/2$ вдоль оси $y$ на 1 вниз.**

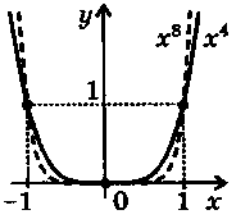
## СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ
## с натуральными показателями степени
## $y = x^n$, где $n \in N$

***Примеры графиков***

$n$ нечетное




$n$ четное




### СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

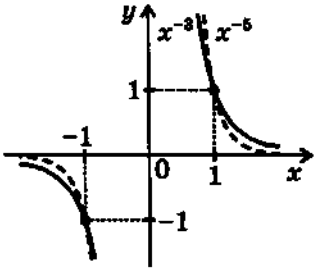
- *Область определения:* $R$
- *Область значений:*
  - при $n$ нечетном $R$
  - при $n$ четном $[0; \infty)$
- *Четность, нечетность:*
  - при $n$ нечетном функция нечетная
  - при $n$ четном функция четная
- *Нули:* $y = 0$ при $x = 0$
- *Промежутки знакопостоянства:*
  - если $n$ нечетное, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (0; \infty) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; 0) \end{cases}$
  - если $n$ четное, то $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
- *Промежутки монотонности:*
  - если $n$ нечетное, то функция возрастает при $x \in R$
  - если $n$ четное, то $\begin{cases} \text{функция возрастает при } x \in [0; \infty) \\ \text{функция убывает при } x \in (-\infty; 0] \end{cases}$
- *Экстремумы:*
  - если $n$ нечетное, экстремумов нет
  - если $n$ четное, $y_{min} = 0$ при $x_{min} = 0$
- *Графики функций проходят через точки:*
  - при $n$ нечетном $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$
  - при $n$ четном $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$

*Замечание.* При $n = 0$ функция $y = x^n$ определяется так: $x^0 = 1$ при $x \neq 0$; при $x = 0$ функция не определена.

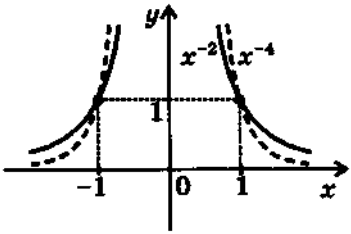
## СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ
## с целыми отрицательными показателями степени
## $y = x^{-n}$, где $n \in N$

*Примеры графиков*

$n$ нечетное




$n$ четное




### СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

- *Область определения:* $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
- *Область значений:*
  - при $n$ нечетном $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
  - при $n$ четном $(0; \infty)$
- *Четность, нечетность:*
  - при $n$ нечетном функция нечетная
  - при $n$ четном функция четная
- *Нулей* нет.
- *Промежутки знакопостоянства:*
  - если $n$ нечетное, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (0; \infty) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; 0) \end{cases}$
  - если $n$ четное, то $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
- *Промежутки монотонности:*
  - если $n$ нечетное, то функция убывает при $x \in (-\infty; 0)$ и при $x \in (0; \infty)$
  - если $n$ четное, то $\begin{cases} \text{функция возрастает при } x \in (-\infty; 0) \\ \text{функция убывает при } x \in (0; \infty) \end{cases}$
- *Экстремумов* нет
- *Графики функций проходят через точки:*
  - при $n$ нечетном $(-1; -1)$, $(1; 1)$
  - при $n$ четном $(-1; 1)$, $(1; 1)$
- *Асимптоты:* $x = 0$, $y = 0$

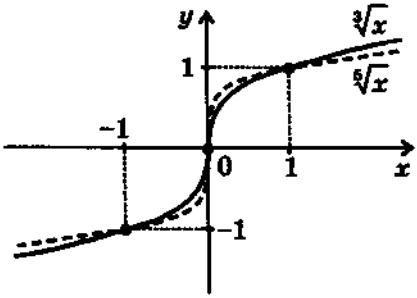
*Замечание.* При $n = 1$ функция $y = x^{-n}$ имеет вид $y = 1/x$ и называется *обратной пропорциональностью.*

## ФУНКЦИИ

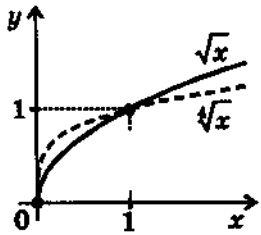
$$y = \sqrt[n]{x}\text{, где } n \in N$$

***Примеры графиков***

$n$ нечетное




$n$ четное

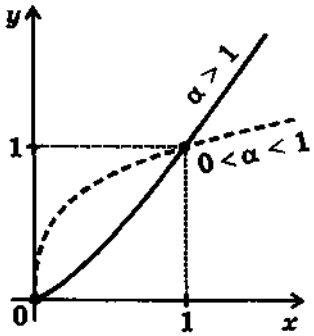



### СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

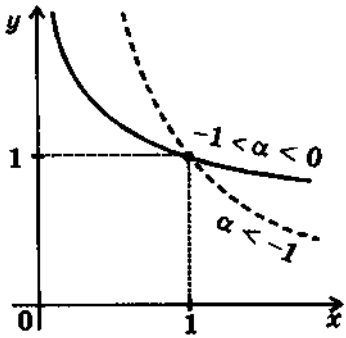
- *Область определения:*
  при $n$ нечетном $R$
  при $n$ четном $[0; \infty)$
- *Область значений:*
  при $n$ нечетном $R$
  при $n$ четном $[0; \infty)$
- *Четность, нечетность:*
  при $n$ нечетном функция нечетная
  при $n$ четном функция не является ни четной, ни нечетной
- *Нули:* $y = 0$ при $x = 0$
- *Промежутки знакопостоянства:*
  если $n$ нечетное, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (0; \infty) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; 0) \end{cases}$
  если $n$ четное, то $y > 0$ при $x \in (0; \infty)$
- *Промежутки монотонности:*
  функция возрастает при всех $x$ из области определения
- *Экстремумов* нет
- *Графики функций проходят через точки:*
  при $n$ нечетном $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$
  при $n$ четном $(0; 0)$, $(1; 1)$

## СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ
## с действительными показателями степени
## $y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in R$

$\alpha > 0$




$\alpha < 0$

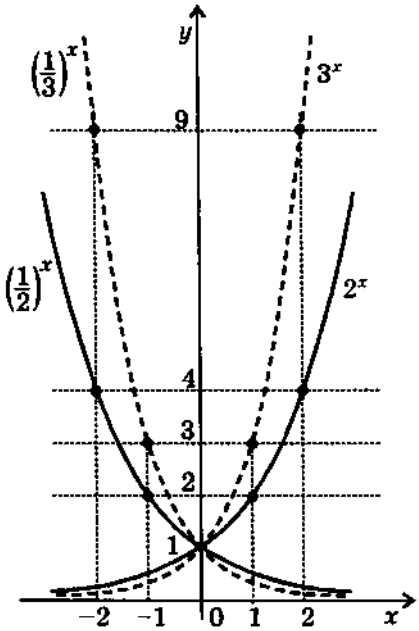



### СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

- *Область определения:*
  если $\alpha > 0$, $[0; \infty)$
  если $\alpha < 0$, $(0; \infty)$
- *Область значений:*
  если $\alpha > 0$, $[0; \infty)$
  если $\alpha < 0$, $(0; \infty)$
- *Четность, нечетность:*
  функция не является ни четной, ни нечетной
- *Нули:*
  если $\alpha > 0$, $y = 0$ при $x = 0$
  если $\alpha < 0$, нулей нет
- *Промежутки знакопостоянства:*
  $y > 0$ при $x \in (0; \infty)$
- *Промежутки монотонности:*
  при $\alpha > 0$ функция возрастает при $x \in [0; \infty)$
  при $\alpha < 0$ функция убывает при $x \in (0; \infty)$
- *Экстремумов* нет
- *Графики функций проходят через точки:*
  при $\alpha > 0$ (0; 0), (1; 1)
  при $\alpha < 0$ (1; 1)
- *Асимптоты:* при $\alpha < 0$ $x = 0$ и $y = 0$

## ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

## $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$*)




**СВОЙСТВА ФУНКЦИИ**

- *Область определения:* $R$
- *Область значений:* $(0; \infty)$
- *Четность, нечетность:*

  функция не является ни четной, ни нечетной
- *Нулей* нет
- *Промежутки знакопостоянства:* $y > 0$ при $x \in R$
- *Промежутки монотонности:*

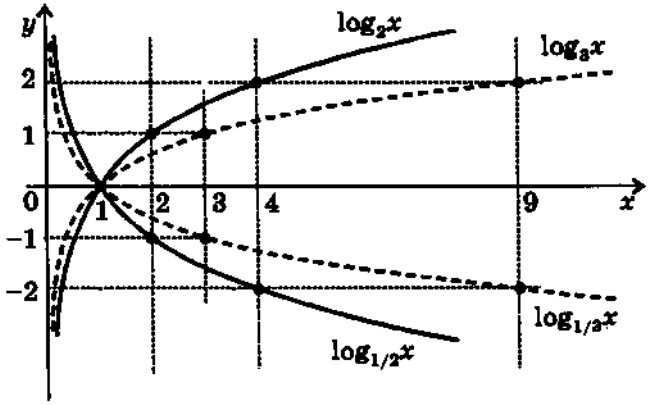
  при $0 < a < 1$ функция убывает при $x \in R$

  при $a > 1$ функция возрастает при $x \in R$
- *Экстремумов* нет
- *График функции проходит через точку* $(0; 1)$
- *Асимптота:* $y = 0$

*) При $a = 1$ функция $y = a^x$ является постоянной: $1^x = 1$ при $x \in R$.

## ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

$$y = \log_a x, \text{ где } a > 0,\ a \neq 1$$




**СВОЙСТВА ФУНКЦИИ**

- *Область определения:* $(0; \infty)$
- *Область значений:* $R$
- *Четность, нечетность:*

  функция не является ни четной, ни нечетной
- *Нули:* $y = 0$ при $x = 1$
- *Промежутки знакопостоянства:*

  если $0 < a < 1$, то $y > 0$ при $x \in (0; 1)$, $y < 0$ при $x \in (1; \infty)$

  если $a > 1$, то $y > 0$ при $x \in (1; \infty)$, $y < 0$ при $x \in (0; 1)$
- *Промежутки монотонности:*

  при $0 < a < 1$ функция убывает при $x \in (0; \infty)$

  при $a > 1$ функция возрастает при $x \in (0; \infty)$
- *Экстремумов* нет
- *График функции проходит через точку* $(1; 0)$
- *Асимптота:* $x = 0$

*Замечание.* Логарифмическая и показательная функции с одним и тем же основанием $a$ являются взаимно обратными функциями (см. стр. 11).

# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ*)

$$y = \sin x$$

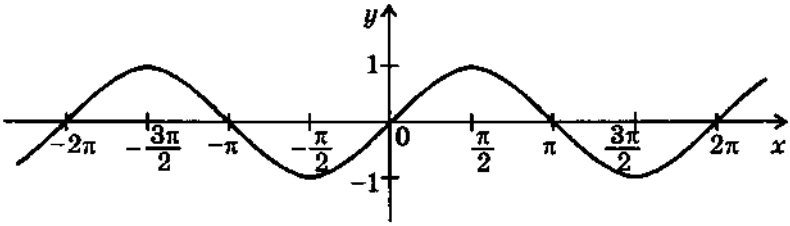



*график — синусоида*

**СВОЙСТВА ФУНКЦИИ**

- *Область определения:* $R$
- *Область значений:* $[-1; 1]$
- *Четность, нечетность:* функция нечетная
- *Период:* $2\pi$
- *Нули:* $\sin x = 0$ при $x = \pi n, \quad n \in Z$
- *Промежутки знакопостоянства:*

  $\sin x > 0$ при $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n), \quad n \in Z$

  $\sin x < 0$ при $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n), \quad n \in Z$
- *Экстремумы:*

  $x_{min} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z; \quad y_{min} = -1$

  $x_{max} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z; \quad y_{max} = 1$
- *Промежутки монотонности:*

  функция возрастает при $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right], \quad n \in Z$

  функция убывает при $x \in \left[\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], \quad n \in Z$

*) Основные формулы тригонометрии см. на стр. 88-90.
Далее в качестве периода функции рассматривается ее наименьший положительный период.

$$y = \cos x$$

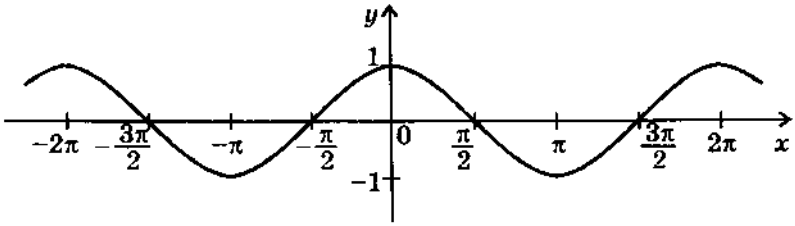



*график — косинусоида*

**СВОЙСТВА ФУНКЦИИ**

- *Область определения:* $R$
- *Область значений:* $[-1; 1]$
- *Четность, нечетность:* функция четная
- *Период:* $2\pi$
- *Нули:* $y = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$
- *Промежутки знакопостоянства:*

  $\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), \quad n \in Z$

  $\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), \quad n \in Z$
- *Экстремумы:*

  $x_{min} = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z; \quad y_{min} = -1$

  $x_{max} = 2\pi n, \quad n \in Z; \quad y_{max} = 1$
- *Промежутки монотонности:*

  функция возрастает при $x \in [-\pi + 2\pi n; 2\pi n], \quad n \in Z$

  функция убывает при $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n], \quad n \in Z$

*Замечание.* Графики функций $y \quad \sin x$ и $y = \cos x$ получаются друг из друга с помощью параллельных переносов вдоль оси $x$ на $\pi/2$ : $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$y = \operatorname{tg} x$$

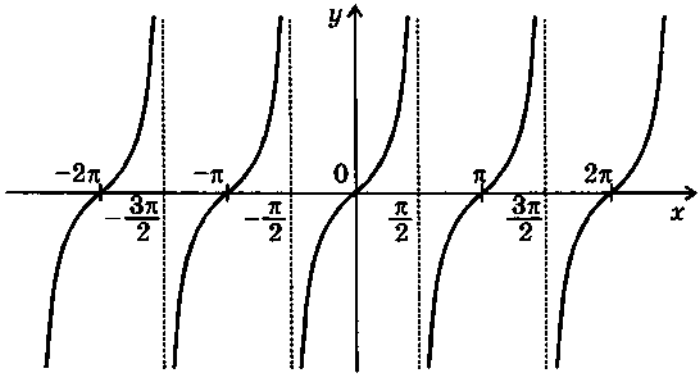



*график — тангенсоида*

**СВОЙСТВА ФУНКЦИИ**

- *Область определения:* объединение интервалов $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right), \quad n \in Z$
- *Область значений:* $R$
- *Четность, нечетность:* функция нечетная
- *Период:* $\pi$
- *Нули:* $y = 0$ при $x = \pi n, \quad n \in Z$
- *Промежутки знакопостоянства:*

  $\operatorname{tg} x > 0$ при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right), \quad n \in Z$

  $\operatorname{tg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n\right), \quad n \in Z$
- *Экстремумов* нет
- *Промежутки монотонности:*

  функция возрастает на каждом интервале области определения
- *Асимптоты:* $x = \frac{\pi}{2}+\pi n, \; n \in Z$

$$y = \operatorname{ctg} x$$

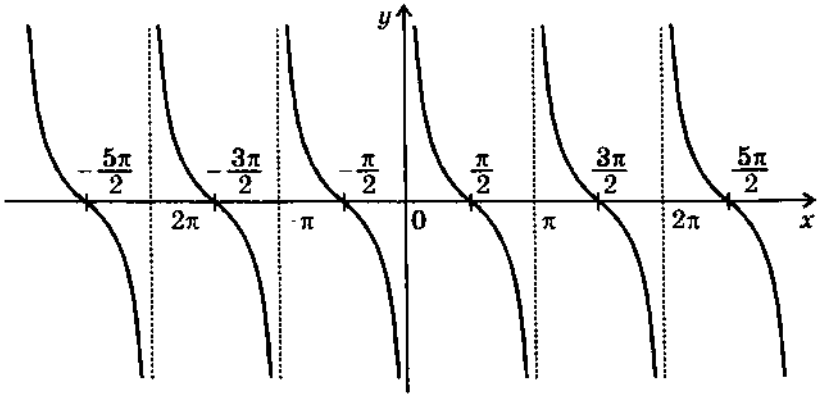



*график — котангенсоида*

**СВОЙСТВА ФУНКЦИИ**

- *Область определения:* объединение интервалов $(\pi n;\ \pi + \pi n)$, $n \in Z$
- *Область значений:* $R$
- *Четность, нечетность:* функция нечетная
- *Период:* $\pi$
- *Нули:* $y = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$
- *Промежутки знакопостоянства:*

  $\operatorname{ctg} x > 0$ при $x \in \left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in Z$

  $\operatorname{ctg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right), \quad n \in Z$
- *Экстремумов* нет
- *Промежутки монотонности:*

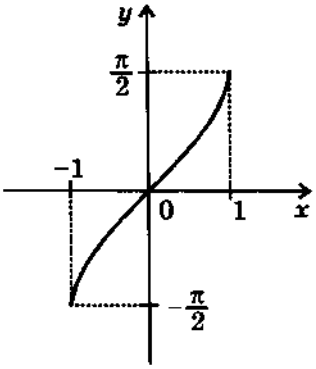
  функция убывает на каждом интервале области определения
- *Асимптоты:* $x = \pi n$, $n \in Z$

*Замечание.* График функции $y = \operatorname{ctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ отражением относительно любой из координатных осей и последующим параллельным переносом вдоль оси $x$ на $\pi/2$.

# ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

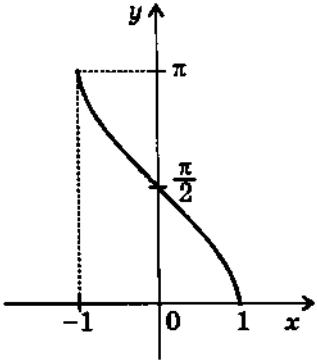
$y = \arcsin x$

**функция, обратная функции $y = \sin x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$**




$y = \arccos x$

**функция, обратная функции $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$**




**СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ*)**

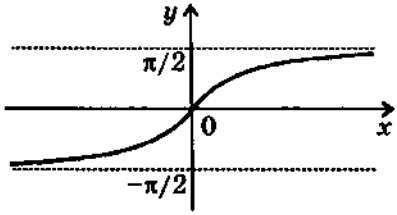
| | $y = \arcsin x$ | $y = \arccos x$ |
|---|---|---|
| • *Область определения:* | $[-1; 1]$ | $[-1; 1]$ |
| • *Область значений:* | $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ | $[0; \pi]$ |
| • *Четность, нечетность:* | нечетная | ни четная, ни нечетная |
| • *Нули:* | $y = 0$ при $x = 0$ | $y = 0$ при $x = 1$ |
| • *Промежутки знакопостоянства:* | $y > 0$ при $x \in (0; 1]$<br>$y < 0$ при $x \in [-1; 0)$ | $y > 0$ при $x \in [-1; 1)$ |
| • *Экстремумы:* | нет | нет |
| • *Промежутки монотонности:* | возрастает на всей области определения | убывает на всей области определения |

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2$$

*) См. также стр. 91.

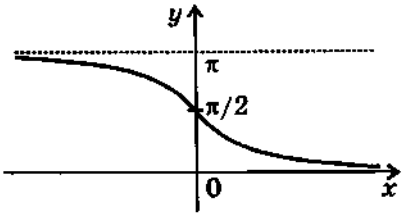
$y = \operatorname{arctg} x$

**функция, обратная функции $y = \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$**




$y = \operatorname{arcctg} x$

**функция, обратная функции $y = \operatorname{ctg} x$, $0 < x < \pi$**




**СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ**

| | $y = \operatorname{arctg} x$ | $y = \operatorname{arcctg} x$ |
|---|---|---|
| • *Область определения:* | $R$ | $R$ |
| • *Область значений:* | $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ | $(0; \pi)$ |
| • *Четность, нечетность:* | нечетная | ни четная, ни нечетная |
| • *Нули:* | $y = 0$ при $x = 0$ | нулей нет |
| • *Промежутки знакопостоянства:* | $y > 0$ при $x \in (0; \infty)$<br>$y < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$ | $y > 0$ при $x \in R$ |
| • *Экстремумы:* | нет | нет |
| • *Промежутки монотонности:* | возрастает при $x \in R$ | убывает при $x \in R$ |
| • *Асимптоты:* | $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$ | $y = 0$ и $y = \pi$ |

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$$

# УРАВНЕНИЯ*)

**Уравнением** называется равенство, содержащее одно или несколько неизвестных.

***Общий вид уравнения***

с одним неизвестным:

$$f_1(x) = f_2(x),$$

с $n$ неизвестными:

$$f_1(x_1,\ldots,x_n) = f_2(x_1,\ldots,x_n).$$

Часто все функции переносят в одну часть уравнения, и тогда уравнения принимают вид:

$$f(x) = 0;$$
$$f(x_1,\ldots,x_n) = 0.$$

**Областью допустимых значений** уравнения называется область определения функций $f(x)$ или $f(x_1,\ldots,x_n)$.

***Пример.*** Областью допустимых значений уравнения $\sqrt{x-2} = \sqrt{8-x}$ является $x \in [2; 8]$.

**Решением уравнения** с одним неизвестным (корнем уравнения) называется такое значение неизвестного, при подстановке которого уравнение обращается в верное числовое равенство.

**Решить уравнение** — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

***Примеры.*** Решить уравнение $x^2 - 4 = 0$ — значит найти его корни $x_1 = -2$; $x_2 \quad 2$; решить уравнение $x^2 + 4 \quad 0$ — значит доказать, что корней нет.

**Равносильными** называются уравнения, множества корней которых совпадают.

В частности, равносильны все уравнения, не имеющие корней.

***Примеры равносильных уравнений:***

1. $x - 2 = 0$ и $2^x = 4$,
2. $\sin x = 2$ и $\sqrt{x} = -1$.

*) Решения всех уравнений, неравенств и систем рассматриваются только на множестве действительных чисел.

## ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$ax + b = 0,$$

где $a$ и $b$ —действительные числа

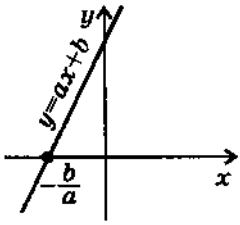
**Наличие корней и их число зависит от значений $a$ и $b$.**

**$a \neq 0$, $b$ — любое число**

Уравнение $ax + b = 0$ имеет один корень:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Прямая $y = ax + b$ пересекает ось $x$ в одной точке.

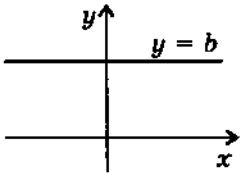



***Пример***: $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1{,}5$

**$a = 0$, $b \neq 0$**

Уравнение $0 \cdot x + b = 0$ не имеет корней.

Прямая $y = 0 \cdot x + b$ не пересекает ось $x$.

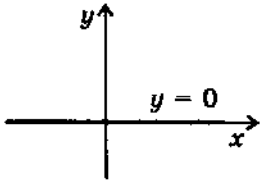



***Пример***: $0 \cdot x + 2 = 0$ — уравнение не имеет корней.

**$a = 0$, $b = 0$**

Уравнение $0 \quad x + 0 \quad 0$ имеет бесконечно много корней: корнем является любое число.

Прямая $y \quad 0 \cdot x + 0$ совпадает с осью $x$.




***Пример***: $0 \cdot x + 2 = 2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$ — корнем является любое число.

## КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$

Уравнение в общем виде можно решить с помощью *выделения полного квадрата* (см. стр. 26). Число корней зависит от значения *дискриминанта* $D = b^2 - 4ac$.

*Замечание.* Если $a < 0$, удобно умножить уравнение на $-1$, чтобы получить уравнение с положительным коэффициентом при $x^2$.

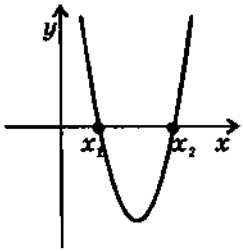
***Пример***: $-2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0$

### $D > 0$

Уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

Парабола пересекает ось $x$ в двух точках.




*Замечание.* Если $b$ — четное число, для нахождения корней обычно используется формула

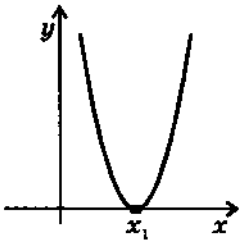
$$x_{1,2} = \frac{-b/2 \mp \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$$

### $D = 0$

Уравнение имеет один (двукратный) корень:

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

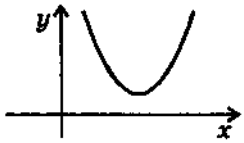
Парабола касается оси $x$.




### $D < 0$

Уравнение не имеет корней.

Парабола не имеет общих точек с осью $x$.



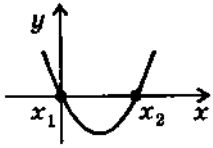
## НЕПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$ax^2 + bx = 0,\ ax^2 + c = 0,\ ax^2 = 0$$

**Такие уравнения решают обычно без применения общей формулы для корней квадратного уравнения.**

$$\boxed{ax^2 + bx = 0,\ b \neq 0}$$

Уравнение всегда имеет два корня. Решается с помощью разложения левой части уравнения на множители:




$$x\,(ax + b) = 0$$

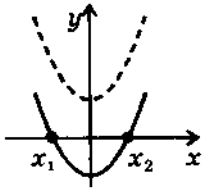
$$x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{b}{a}$$

**Парабола пересекает ось $x$ в двух точках, одна из которых является началом координат.**

***Пример***: $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x\,(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2$

$$\boxed{ax^2 + c = 0,\ c \neq 0}$$

Уравнение не имеет корней, если знаки $a$ и $c$ совпадают; уравнение имеет два корня, если знаки $a$ и $c$ различны:




$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

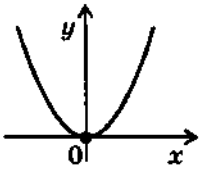
**Парабола или не пересекает ось $x$, или пересекает ее в двух точках, симметричных относительно начала координат.**

***Примеры***: $x^2 + 1 = 0$ — нет решений

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1$

$$\boxed{ax^2 = 0}$$

Уравнение имеет один (двукратный) корень: $x_1 = 0$.




**Парабола касается оси $x$ в начале координат.**

### ТЕОРЕМЫ ВИЕТА

1. Если $x_1$ и $x_2$ — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -b/a$; $x_1 \quad x_2 = c/a$.

2. Если $x_1$ и $x_2$ таковы, что $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1 \quad x_2 = c/a$, то $x_1$ и $x_2$ являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

### ПРИВЕДЕННЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Приведенным квадратным уравнением называется уравнение вида $x^2 + px + q = 0$

*Замечание.* Любое квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ можно привести к такому виду с помощью деления уравнения на $a$.

### ФОРМУЛЫ ВИЕТА ДЛЯ КОРНЕЙ ПРИВЕДЕННОГО КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \quad x_2 = q$$

Теоремы Виета часто используются для:

- *Подбора корней без решения уравнения*
- *Определения знаков корней без решения уравнения (при условии $D > 0$) по следующим правилам:*

| | $p > 0$ | $p < 0$ |
|---|---|---|
| $q > 0$ | Оба корня отрицательны | Оба корня положительны |
| $q < 0$ | Корни имеют противоположные знаки | |

***Примеры подбора корней с использованием теорем Виета:***

1. $x^2 - 7x + 6 = 0$. Нетрудно подобрать пару чисел, сумма которых равна 7, а произведение равно 6 — это 1 и 6. Согласно теоремам Виета корнями квадратного уравнения $x^2 - 7x + 6 = 0$ являются 1 и 6.
2. $x^2 - 4x - 5 = 0$. Нетрудно подобрать пару чисел, сумма которых равна 4, а произведение равно −5 — это −1 и 5. Согласно теоремам Виета корнями квадратного уравнения $x^2 - 4x - 5 = 0$ являются −1 и 5.

## УРАВНЕНИЯ, СВОДЯЩИЕСЯ К КВАДРАТНЫМ

$$af^2(x) + bf(x) + c = 0$$

### СХЕМА РЕШЕНИЯ

1. С помощью введения новой переменной $t$ $f(x)$ уравнение приводят к виду
$$at^2 + bt + c = 0$$
2. Если это уравнение имеет корни $t_1$ и $t_2$ (или один корнень $t_1$), решения исходного уравнения ищут как решения совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = t_1 \\ f(x) = t_2 \end{array}\right.$ (или одного уравнения $f(x)=t_1$).

Частный случай уравнений, сводящихся к квадратным — *биквадратные уравнения* (уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c$ 0). В этом случае вводят переменную $t = x^2$.

***Примеры:***

***Биквадратное уравнение***

$x^4 - x^2 - 2 = 0$; замена $t = x^2$

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 = -1 & \text{корней нет} \\ x^2 = 2 & x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

***Иррациональное уравнение***

$x^2 + \sqrt{x^2 - 2} = 4 \Leftrightarrow (x^2 - 2) + \sqrt{x^2 - 2} - 2 = 0$;

замена $t = \sqrt{x^2 - 2}$

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x^2 - 2} = -2 & \text{корней нет} \\ \sqrt{x^2 - 2} = 1 & x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

***Тригонометрическое уравнение***

$\sin^2 x - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0$; замена $t = \cos x$

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = -2 & \text{корней нет} \\ \cos x = 1 & x = 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$$

***Показательное уравнение***

$3^{2x} - 12 \quad 3^{x-1} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \quad 3^x + 3 = 0$;

замена $t = 3^x$

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

## ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**Как правило, иррациональное уравнение сводится к равносильной системе, содержащей уравнения и неравенства.**

1. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$

*Замечание.* Из двух систем выбирают ту, которая решается проще.

*Пример:* $\sqrt{3-x} = \sqrt{x^2-5x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = x^2-5x-2 \\ 3-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-5=0 \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$$

2. $\sqrt{f(x)} = a$

Если $a < 0$, уравнение не имеет корней.
Если $a \geqslant 0$, уравнение равносильно уравнению $f(x) = a^2$.

*Замечание.* Иногда иррациональное уравнение можно свести к приведенному виду с помощью введения новой переменной.

*Пример:* $x - \sqrt{x+1} = 5 \Leftrightarrow (x+1) - \sqrt{x+1} - 6 = 0$

$$z = \sqrt{x+1},\ z^2 - z - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-2 \\ z=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=-2 \\ \sqrt{x+1}=3 \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности не имеет корней, корень второго уравнения $x = 8$.

3. $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$

*Пример:* $\sqrt{7-x} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ 7-x = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x^2-x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

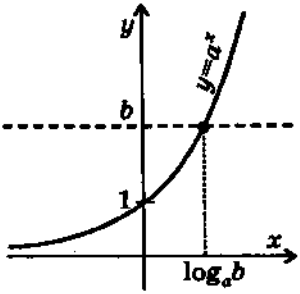
## ПРОСТЕЙШИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$a^x = b, \text{ где } a > 0,\ a \neq 1$$

Если $b > 0$, уравнение имеет один корень:

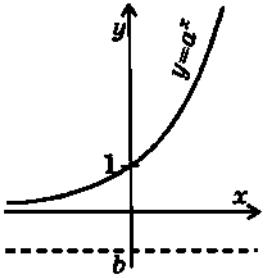
$$x = \log_a b.$$

График функции $y = a^x$ пересекает прямую $y = b$ в одной точке.




Если $b \leqslant 0$, корней нет.

График функции $y = a^x$ не пересекает прямую $y = b$.




***Примеры:*** 1. $2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{1}{2} = -1$ 2. $3^x = 9 \Leftrightarrow x = \log_3 9 = 2$

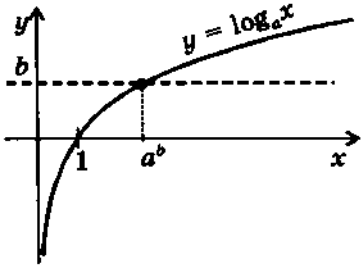
## ПРОСТЕЙШИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

$$\log_a x = b, \text{ где } a > 0,\ a \neq 1$$

Уравнение имеет один положительный корень при любом $b$:

$$x = a^b.$$

График функции $y = \log_a x$ пересекает прямую $y = b$ в одной точке.




***Пример:*** $\log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = 2^{-1} = 1/2$

## ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

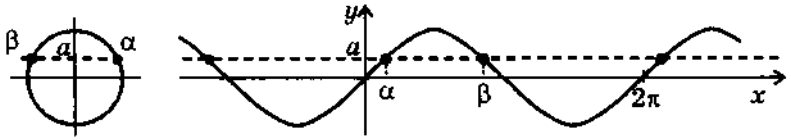
## $\sin x = a$

$|a| \leqslant 1$

$$\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$$

Эти две формулы можно объединить в одну:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$$



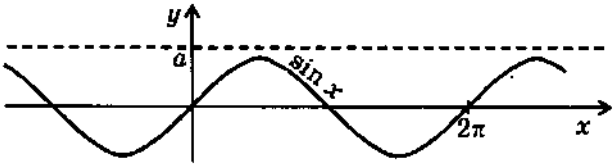

$\alpha = \arcsin a$; $\beta = \pi - \arcsin a$

**Частные случаи**

| $a = -1$ | $a = 0$ | $a = 1$ |
|---|---|---|
| $\sin x = -1$ | $\sin x = 0$ | $\sin x = 1$ |
| $x = -\pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z$ | $x = \pi n,\ n \in Z$ | $x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z$ |
| $-\pi/2$ | $\pi$, $0$ | $\pi/2$ |

$|a| > 1$

*корней нет*



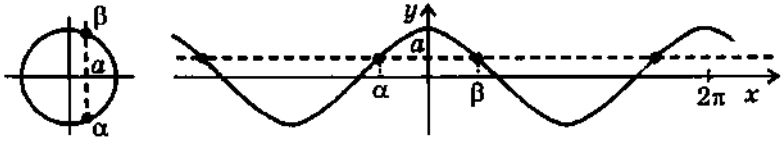
## $\cos x = a$

$|a| \leqslant 1$

$$\cos x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z \\ x = -\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$$

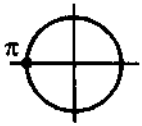
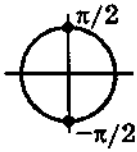
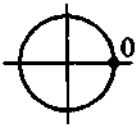
**Эти две формулы можно объединить в одну:**

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$$




$\alpha = -\arccos a$; $\beta = \arccos a$

**Частные случаи**

| $a = -1$ | $a = 0$ | $a = 1$ |
|---|---|---|
| $\cos x = -1$ | $\cos x = 0$ | $\cos x = 1$ |
| $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$ | $x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$ | $x = 2\pi n,\ n \in Z$ |
|  |  |  |

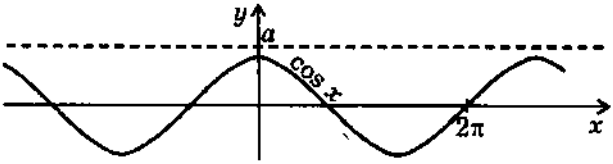


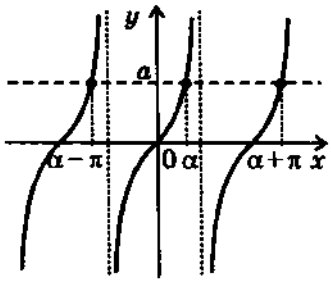
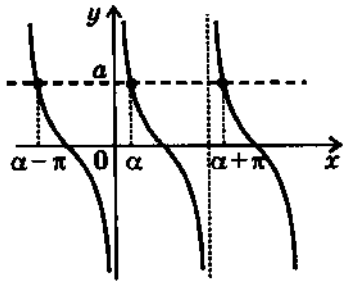




$|a| > 1$

*корней нет*



| $\operatorname{tg} x = a$ | $\operatorname{ctg} x = a$ |
|---|---|
| $x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$ | $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$ |
|   |   |
| $\alpha = \operatorname{arctg} a$ | $\alpha = \operatorname{arcctg} a$ |

## $a \sin x + b \cos x = c \quad (a,\ b \neq 0)$

**Уравнение не имеет корней, если $a^2 + b^2 < c^2$.**
**Если $a^2 + b^2 \geqslant c^2$, уравнение можно привести к виду:**

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

**Поскольку** $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, **можно ввести новую переменную $\varphi$ такую, что** $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

**Уравнение примет вид:** $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

**Корни этого уравнения:**

$$x = -\varphi + (-1)^k \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + \pi k,\ k \in Z$$

***Пример:*** $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$$

# УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ЕГО ГРАФИК

***Общий вид:***

$$f_1(x,y) = f_2(x,y)$$

Решением уравнения с двумя переменными называется **пара** чисел $(x_0,\ y_0)$, при подстановке которых вместо соответствующих переменных $x$, $y$ уравнение обращается в верное числовое равенство.

Решить уравнение с двумя неизвестными — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

***Примеры:***

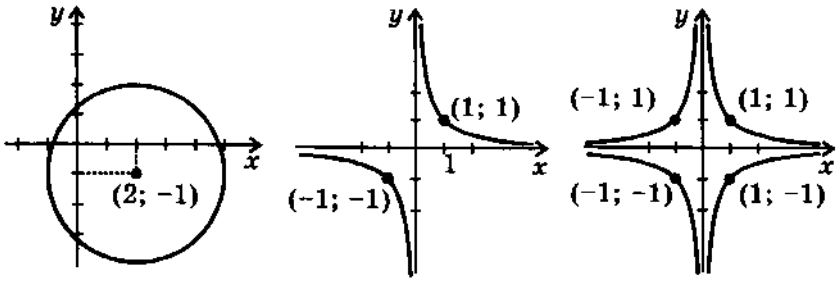
1. $x^2 + y^2 = 1$ — бесконечно много решений: решением является любая пара чисел, совпадающих с координатами точки, лежащей на единичной окружности, т.е. окружности радиуса 1 с центром в начале координат
2. $x^2 + y^2 = 0$ — одно решение: $x = 0$, $y = 0$
3. $x^2 + y^2 = -1$ — решений нет

***Решения уравнения с двумя переменными представляют часто в виде графика.***

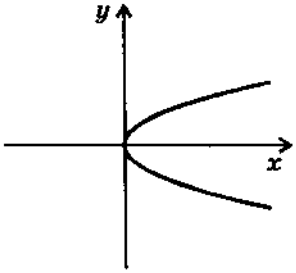
Графиком уравнения с двумя переменными называется множество всех точек плоскости, координаты которых $x$, $y$ являются решениями этого уравнения.

***Примеры графиков уравнения с двумя переменными:***

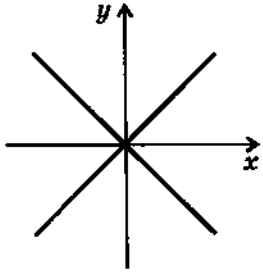
1. $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ 2. $xy = 1$ 3. $|x|\cdot|y| = 1$



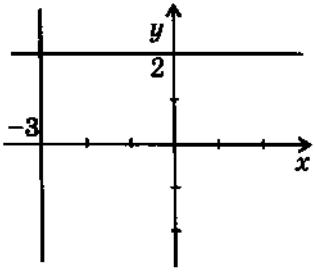
**4.** $y^2 = x$



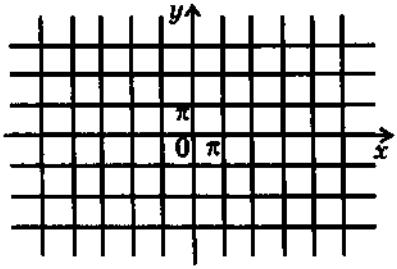

**5.** $y^2 = x^2$



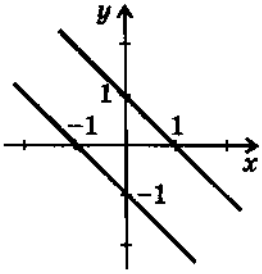

**6.** $(x + 3)(y - 2) = 0$



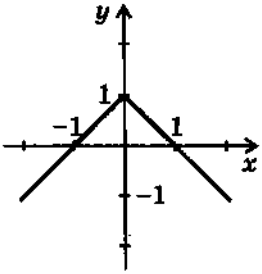

**7.** $\sin x \cdot \sin y = 0$



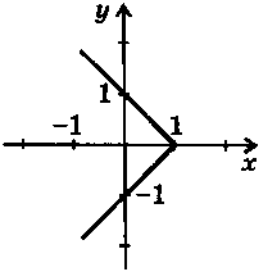

**8.** $|x + y| = 1$



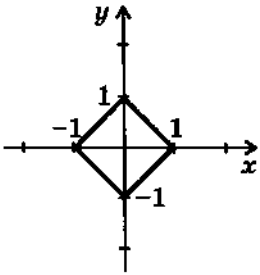

**9.** $|x| + y = 1$




**10.** $x + |y| = 1$




**11.** $|x| + |y| = 1$



# НЕРАВЕНСТВА

**Неравенствами** называются выражения вида $a < b$, $a \leqslant b$, $a > b$, $a \geqslant b$, где $a$ и $b$ могут быть числами (числовыми выражениями) или функциями. Неравенства, содержащие знаки $<$ или $>$, называются строгими, а содержащие знаки $\leqslant$ или $\geqslant$ — нестрогими.

*Различают два вида неравенств: числовые и неравенства с переменными.*

***Примеры:***

1. $5 < 10$ — числовое неравенство
2. $2x \geqslant 8$ — неравенство с одной переменной
3. $2x < 5y$ — неравенство с двумя переменными

**Решением неравенства** с одной переменной называется такое значение переменной, при подстановке которого неравенство обращается в верное числовое неравенство.

**Решить неравенство** — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

***Примеры:***

1. $x^2 + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in R$
2. $x - 4 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 4]$
3. $x^2 < 0$ — решений нет

**Равносильными** называются неравенства, множества решений которых совпадают.

В частности, равносильны все неравенства, не имеющие решений.

***Примеры равносильных неравенств:***

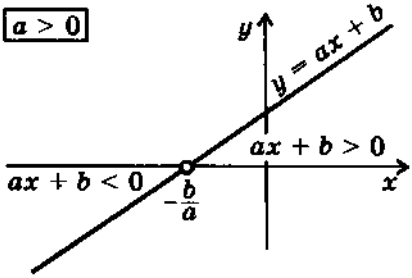
1. $x > 2$ и $x^3 > 8$
2. $\sin x > 2$ и $\sqrt{x} < -1$

Из неравенств так же, как из уравнений, составляют системы и совокупности (примеры см. на стр. 62). Кроме того, часто рассматриваются системы и совокупности, содержащие одновременно уравнения и неравенства (примеры см. на стр. 50).

# ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

$$ax + b > 0,\ ax + b \geqslant 0,\ ax + b < 0,\ \ ax + b \leqslant 0$$

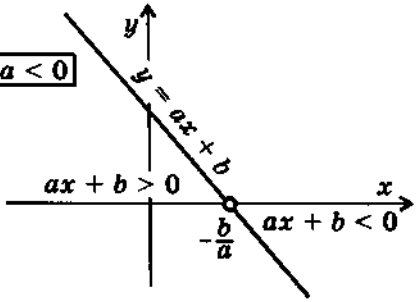
$\boxed{a > 0}$




$ax + b > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$

$ax + b < 0 \Leftrightarrow$
$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$

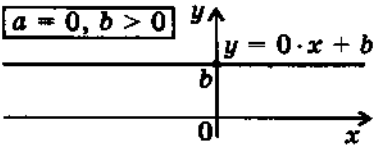
$\boxed{a < 0}$




$ax + b > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$

$ax + b < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$

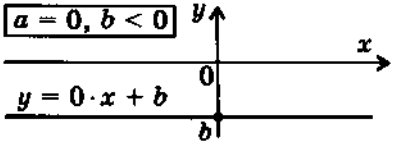
$\boxed{a = 0,\ b > 0}$




$0 \quad x + b > 0 \Leftrightarrow x \in R$

$0 \quad x + b < 0$ — решений нет

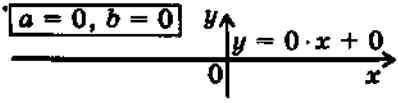
$\boxed{a = 0,\ b < 0}$




$0 \quad x + b > 0$ — решений нет

$0 \quad x + b < 0 \Leftrightarrow x \in R$

$\boxed{a = 0,\ b = 0}$




$0 \quad x + 0 > 0$ — решений нет

$0 \quad x + 0 < 0$ — решений нет

*Замечание.* Если неравенство нестрогое ($ax + b \geqslant 0$, $ax + b \leqslant 0$), его решением является объединение решений соответствующего строгого неравенства и уравнения $ax + b = 0$. Например, $x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-2; \infty)$; $0 \cdot x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in R$.

# КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

$ax^2 + bx + c > 0$ $\qquad$ $ax^2 + bx + c < 0$

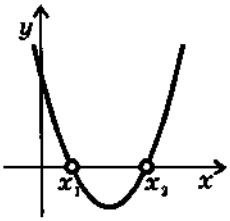
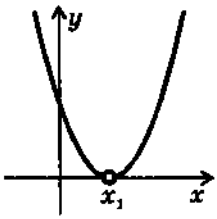
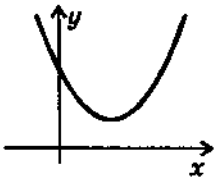
$ax^2 + bx + c \geqslant 0$ $\qquad$ $ax^2 + bx + c \leqslant 0$

Решение неравенства зависит, в основном, от значений коэффициента $a$ и дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Если $a < 0$, удобно умножить неравенство на $-1$, т.е. изменить все знаки в левой части на противоположные и *изменить знак неравенства*.

***Пример.*** Неравенство $-2x^2 + 3x - 6 > 0$ равносильно неравенству $2x^2 - 3x + 6 < 0$.

Ниже рассмотрены только случаи $a > 0$.

| | | |
|---|---|---|
| $D > 0$ |  | $ax^2 + bx + c > 0$<br>Решением является объединение двух лучей: $(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$.<br><br>$ax^2 + bx + c < 0$<br>Решением является интервал $(x_1; x_2)$. |
| $D = 0$ |  | $ax^2 + bx + c > 0$<br>Решением является объединение двух лучей: $(-\infty; x_1) \cup (x_1; \infty)$.<br><br>$ax^2 + bx + c < 0$<br>Решений нет. |
| $D < 0$ |  | $ax^2 + bx + c > 0$<br>Решением является вся числовая ось.<br><br>$ax^2 + bx + c < 0$<br>Решений нет. |

*Замечание.* Если неравенство нестрогое ($ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$), его решением является объединение решений соответствующего строгого неравенства и уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Например, $x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow x \in [1; 2]$.

# МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

**для неравенств вида**

$(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}\ldots(x - a_n)^{k_n} > 0$ $(\geqslant 0;\ < 0;\ \leqslant 0)$, где $k_i \in N$

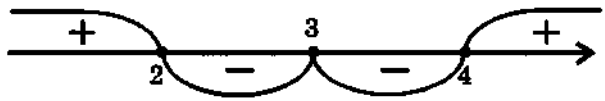
**СХЕМА РЕШЕНИЯ**

1. Найти *нули* функции, стоящей в левой части неравенства.
2. Отметить положение нулей на числовой оси и определить их *кратность* (если $k_i$ четное, то нуль четной кратности, если $k_i$ нечетное — то нечетной).
3. Найти *знаки функции* в промежутках между ее нулями, начиная с крайнего правого промежутка: в этом промежутке функция в левой части неравенства всегда *положительна* для приведенного вида неравенств. При переходе справа налево через нуль функции от одного промежутка к соседнему следует учитывать:
   - если нуль *нечетной* кратности, знак функции *изменяется*;
   - если нуль *четной* кратности, знак функции *сохраняется*.
4. Записать ответ.

***Пример:*** $(x - 2)(x - 3)^2(x - 4)^3 \geqslant 0$

1. нули: $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$

2.

3.



4. $x \in (-\infty;\ 2] \cup \{3\} \cup [4;\ \infty)$

*Замечание.* Если функция, стоящая в левой части неравенства, содержит множители вида $(a_i - x)^{k_i}$, следует заменить их соответствующими множителями $(x - a_i)^{k_i}$ с учетом четности $k_i$.

***Примеры:***

1. $(2 - x)^2 = (x - 2)^2$; 2. $(2 - x)^3 = -(x - 2)^3$

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕРВАЛОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

### СТРОГИЕ НЕРАВЕНСТВА

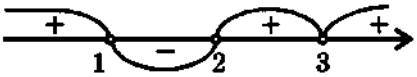
$$\frac{(x-a_1)^{k_1} \quad \ldots \cdot (x-a_n)^{k_n}}{(x-b_1)^{p_1} \quad \cdot (x-b_m)^{p_m}} < 0 \text{ (или } > 0\text{), где } k_i,\ p_j \in N$$

равносильно неравенству

$$(x-a_1)^{k_1} \quad \cdot (x-a_n)^{k_n}(x-b_1)^{p_1} \quad \cdot (x-b_m)^{p_m} < 0 \text{ (или } > 0\text{)}$$

Схему решения таких неравенств см. на стр. 60.

***Пример:*** $\dfrac{(x-2)(x-3)^2}{x-1} < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)^2(x-1) < 0$




$x \in (1;2)$

### НЕСТРОГИЕ НЕРАВЕНСТВА

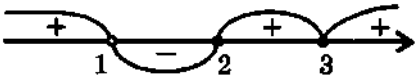
$$\frac{(x-a_1)^{k_1} \quad \ldots \cdot (x-a_n)^{k_n}}{(x-b_1)^{p_1} \quad \cdot (x-b_m)^{p_m}} \leqslant 0 \text{ (или } \geqslant 0\text{), где } k_i,\ p_j \in N$$

равносильно системе

$$\begin{cases} (x-a_1)^{k_1} \quad \cdot (x-a_n)^{k_n}(x-b_1)^{p_1} \quad \cdot (x-b_m)^{p_m} \leqslant 0 \text{ (или } \geqslant 0\text{)} \\ x \neq b_1, b_2, \ldots, b_m \end{cases}$$

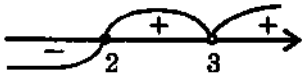
Схему решения первого неравенства системы см. на стр. 60.

***Примеры:*** 1. $\dfrac{(x-2)(x-3)^2}{x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2)(x-3)^2 \leqslant 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$




$x \in (1;2] \cup \{3\}$

2. $\dfrac{(x-3)(x-2)}{x-3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2(x-2) \geqslant 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$




$x \in [2;3) \cup (3;\infty)$

*Замечание.* Сокращение числителя и знаменателя на $(x \quad 3)$ во втором примере привело бы к неравенству $x - 2 \geqslant 0$, решение которого $[2;\ \infty)$ содержит значение $x = 3$, которое не является решением исходного неравенства.

## ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

**Как правило, иррациональное неравенство сводится к равносильной системе (или совокупности систем) неравенств.**

| | |
|---|---|
| $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$ | $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$ |
| $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$ | $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$ |
| $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$ | $\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$ |

***Примеры:***

1. $\sqrt{x+12} > \sqrt{4-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x+12 > 4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ 2x > -8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; 4]$

2. $\sqrt{x+2} \geq x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 \geq x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leq x < 0 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [-2; 2]$

## ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$

| $a > 1$ | $0 < a < 1$ |
|---|---|
| $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ | $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ |

***Примеры:***

1. $2^{x^2} > 2^{x+2} \Leftrightarrow x^2 > x+2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$
2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \Leftrightarrow 2x \geqslant x - 1 \Leftrightarrow x \in [-1; \infty)$

*Замечание.* В случае нестрогих неравенств знаки > и < *в решениях* заменяются соответственно на ⩾ и ⩽.

## ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$

| $a > 1$ | $0 < a < 1$ |
|---|---|
| $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$ | $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$ |
| $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geqslant g(x) \end{cases}$ | $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \leqslant g(x) \end{cases}$ |

***Примеры:***

1. $\log_2(x+8) > \log_2(2x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4 > 0 \\ x+8 > 2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 4)$
2. $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geqslant \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x-2 \leqslant x^2 - 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant 1 \\ x \geqslant 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in [3; \infty)$$

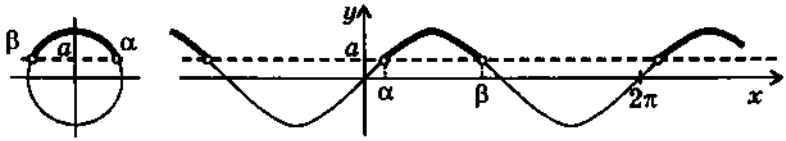
*Замечание.* Следует обратить внимание на область определения функции $y = \log_a x$: решения нестрогих неравенств *не всегда получаются* из решений соответствующих строгих неравенств просто заменой знаков > и < на знаки ⩾ и ⩽.

## ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА*)

$\sin x > a$; $\sin x \geqslant a$; $\sin x < a$; $\sin x \leqslant a$

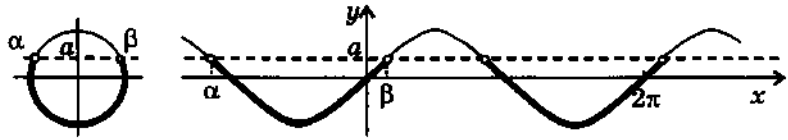
$|a| < 1$

$\sin x > a \Leftrightarrow \arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n,$
$n \in Z$




$\alpha = \arcsin a$; $\beta = \pi - \arcsin a$

$\sin x < a \Leftrightarrow -\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n,$
$n \in Z$




$\alpha = -\pi - \arcsin a$; $\beta = \arcsin a$

*Замечание.* В случае нестрогих неравенств знаки $>$ и $<$ *в решениях* заменяются соответственно на $\geqslant$ и $\leqslant$

| $a = -1$ | $a = 1$ |
|---|---|
| $\sin x < -1$ — решений нет | $\sin x < 1 \Leftrightarrow x \neq \pi/2 + 2\pi n$ |
| $\sin x \leqslant -1 \Leftrightarrow x = -\pi/2 + 2\pi n$ | $\sin x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in R$ |
| $\sin x > -1 \Leftrightarrow x \neq -\pi/2 + 2\pi n$ | $\sin x > 1$ — решений нет |
| $\sin x \geqslant -1 \Leftrightarrow x \in R$ | $\sin x \geqslant 1 \Leftrightarrow x = \pi/2 + 2\pi n$ |

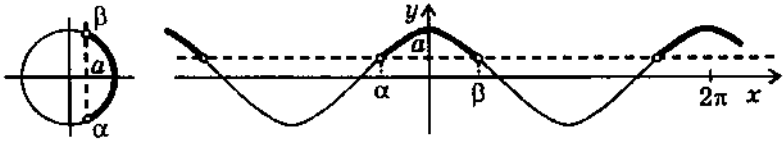
| $a < -1$ | $a > 1$ |
|---|---|
| $\sin x < a$ $(\leqslant a)$ — решений нет | $\sin x < a$ $(\leqslant a) \Leftrightarrow x \in R$ |
| $\sin x > a$ $(\geqslant a) \Leftrightarrow x \in R$ | $\sin x > a$ $(\geqslant a)$ — решений нет |

*) Во всех формулах, приведенных в этом разделе, $n \in Z$.

$\cos x > a$; $\cos x \geqslant a$; $\cos x < a$; $\cos x \leqslant a$

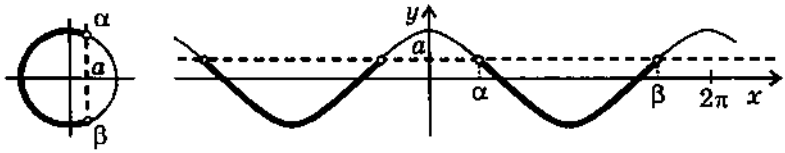
$|a| < 1$

$\cos x > a \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n,$
$n \in Z$




$\alpha = -\arccos a$; $\beta = \arccos a$

$\cos x < a \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n,$
$n \in Z$




$\alpha = \arccos a$; $\beta = 2\pi - \arccos a$

*Замечание.* В случае нестрогих неравенств знаки > и < *в решениях* заменяются соответственно на ⩾ и ⩽.

| $a = -1$ | $a = 1$ |
|---|---|
| $\cos x < -1$ — решений нет | $\cos x < 1 \Leftrightarrow x \neq 2\pi n$ |
| $\cos x \leqslant -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n$ | $\cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in R$ |
| $\cos x > -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + 2\pi n$ | $\cos x > 1$ — решений нет |
| $\cos x \geqslant -1 \Leftrightarrow x \in R$ | $\cos x \geqslant 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n$ |

| $a < -1$ | $a > 1$ |
|---|---|
| $\cos x < a$ ($\leqslant a$) — решений нет | $\cos x < a$ ($\leqslant a$) $\Leftrightarrow x \in R$ |
| $\cos x > a$ ($\geqslant a$) $\Leftrightarrow x \in R$ | $\cos x > a$ ($\geqslant a$) — решений нет |

## $\operatorname{tg} x > a$; $\operatorname{tg} x \geqslant a$; $\operatorname{tg} x < a$; $\operatorname{tg} x \leqslant a$

$\operatorname{tg} x > a$

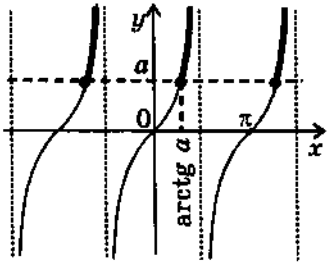
$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \pi/2 + \pi n,$

$n \in Z$

$\operatorname{tg} x \geqslant a$

$\operatorname{arctg} a + \pi n \leqslant x < \pi/2 + \pi n,$

$n \in Z$




$\operatorname{tg} x < a$

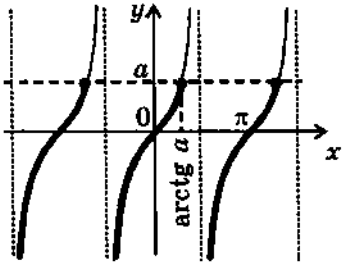
$-\pi/2 + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n,$

$n \in Z$

$\operatorname{tg} x \leqslant a$

$-\pi/2 + \pi n < x \leqslant \operatorname{arctg} a + \pi n,$

$n \in Z$



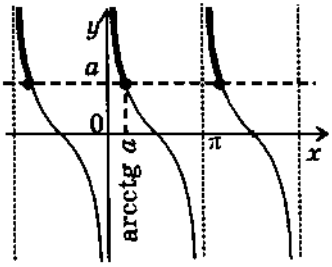

## $\operatorname{ctg} x > a$; $\operatorname{ctg} x \geqslant a$; $\operatorname{ctg} x < a$; $\operatorname{ctg} x \leqslant a$

$\operatorname{ctg} x > a$

$\pi n < x < \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$

$\operatorname{ctg} x \geqslant a$

$\pi n < x \leqslant \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$

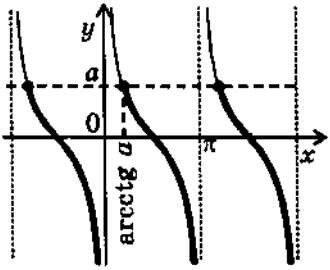



$\operatorname{ctg} x < a$

$\operatorname{arcctg} a + \pi n < x < \pi + \pi n,\ n \in Z$

$\operatorname{ctg} x \leqslant a$

$\operatorname{arcctg} a + \pi n \leqslant x < \pi + \pi n,\ n \in Z$




*Замечание.* Следует обратить внимание на область определения функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$: решения нестрогих неравенств *не всегда получаются* из решений соответствующих строгих неравенств просто заменой знаков $>$ и $<$ на знаки $\geqslant$ и $\leqslant$.

# СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

***Общий вид:***

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_2(x, y) = g_2(x, y) \end{cases}$$

Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными называется **пара** чисел $(x_0, y_0)$, при подстановке которых вместо соответствующих переменных $x$, $y$ **оба** уравнения системы обращаются в верные числовые равенства.

***Примеры:***

1. $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ Решение системы: (3; 1)

2. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ Решения системы: (−1; 1) и (2; 4)

**Решить систему уравнений** — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

**Равносильными** называются системы, множества решений которых совпадают.

В частности, равносильны все системы, не имеющие решений. Система, не имеющая решений, называется *несовместной*.

***Пример несовместной системы:***

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + 6y = 5 \end{cases}$$

*Замечание.* Наряду с системами уравнений часто рассматриваются *совокупности* уравнений. Решением совокупности является объединение решений всех уравнений совокупности.

Для обозначения совокупности уравнений используют квадратную скобку.

## ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

### МЕТОД ПОДСТАНОВКИ

| Этапы решения | Примеры | |
|---|---|---|
| 1. С помощью какого-либо из уравнений выразить одно неизвестное через другое. | $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ из первого уравнения $y = 2x - 4$ | $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ из второго уравнения $y = 2 - x$ |
| 2. Подставить найденное выражение в другое уравнение системы: в результате получится одно уравнение с одним неизвестным. | $x + 3(2x - 4) = 9;$ $7x = 21$ | $x^2 + x(2 - x) - (2 - x)^2 = 1;$ $x^2 - 6x + 5 = 0$ |
| 3. Найти корень (корни) этого уравнения, то есть найти значение (значения) одного из неизвестных системы. | $x = 3$ | $x_1 = 1;$ $x_2 = 5$ |
| 4. Использовать найденное выражение одного неизвестного через другое (подстановку), то есть найти значение (соответствующие значения) второго неизвестного. | $y = 2x - 4 =$ $= 2 \quad 3 - 4 = 2$ | $y_1 = 2 - x_1$ $= 2 - 1 = 1;$ $y_2 = 2 - x_2 =$ $= 2 - 5 = -3$ |
| 5. Записать ответ. | (3; 2) | (1; 1), (5; −3) |

**МЕТОД СЛОЖЕНИЯ**

| Этапы решения | Примеры | |
|---|---|---|
| 1. Сложить почленно уравнения системы, умножив предварительно каждое из уравнений на подходящее число так, чтобы в результате сложения получилось одно уравнение с одним неизвестным. | $\begin{cases} 4x + 5y = 19 \\ 7x - 4y = -5 \end{cases} \begin{vmatrix} \times 4 \\ \times 5 \end{vmatrix}$ <br> $\begin{cases} 16x + 20y = 76 \\ 35x - 20y = -25 \end{cases}$ <br> $51x = 51$ | $\begin{cases} 2xy + x^2 = 2 \\ 3xy - 4x = 5 \end{cases} \begin{vmatrix} \times 3 \\ \times(-2) \end{vmatrix}$ <br> $\begin{cases} 6xy + 3x^2 = 6 \\ -6xy + 8x = -10 \end{cases}$ <br> $3x^2 + 8x = -4$ |
| 2. Найти корень (корни) этого уравнения, то есть найти значение (значения) одного из неизвестных системы. | $x = 1$ | $x_1 = -2;$ <br> $x_2 = -2/3$ |
| 3. Подставить найденное значение (значения) одного из неизвестных в любое из уравнений системы: в результате снова получится уравнение (уравнения) с одним неизвестным. | Подстановка в первое уравнение дает: <br> $4 \quad 1 + 5y = 19;$ <br> $5y = 15$ | Подстановка во второе уравнение дает: <br> при $x = x_1 = -2$ <br> $6y = 3;$ <br> при $x = x_2 = -2/3$ <br> $2y = -7/3$ |
| 4. Найти решение (решения) этого уравнения (этих уравнений), то есть найти значение (соответствующие значения) второго неизвестного. | $y = 3$ | $y_1 = 1/2;$ <br> $y_2 = -7/6$ |
| 5. Записать ответ. | (1; 3) | (−2; 1/2), <br> (−2/3; −7/6) |

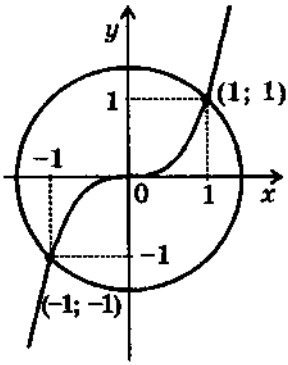
## ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

**Надо построить графики обоих уравнений и найти координаты общих точек этих графиков — эти координаты являются решениями системы.**

***Примеры:***

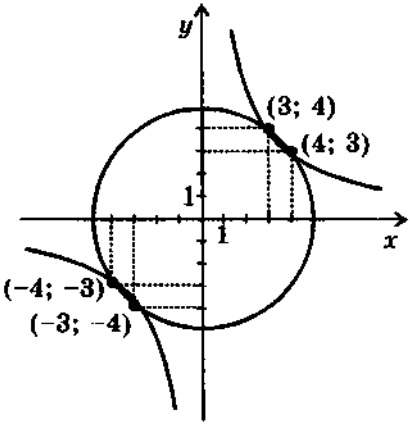
1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^3 - y = 0 \end{cases}$

**График первого уравнения — окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат, график второго уравнения — кубическая парабола $y = x^3$. Эти два графика пересекаются в двух точках с координатами (−1; −1) и (1; 1).**




2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$

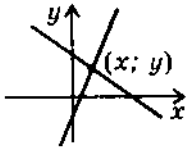
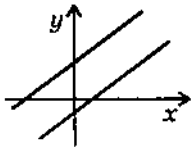
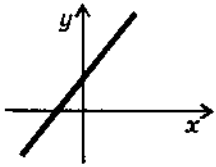
**График первого уравнения — окружность радиуса 5 с центром в начале координат, график второго уравнения — гипербола $y = \frac{12}{x}$. Эти два графика пересекаются в четырех точках с координатами (−4; −3), (−3; −4), (4; 3) и (3; 4).**




*Замечание.* Хотя графический метод не всегда позволяет найти точные решения системы уравнений, он помогает обнаружить решения, которые часто упускаются из виду при аналитическом решении (например, отрицательные значения неизвестных в приведенных примерах).

## СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ*)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

| Возможные случаи | Графическая интерпретация |
|---|---|
| **1.** Коэффициенты при неизвестных в уравнениях не пропорциональны, т.е. $a_1b_2 \neq a_2b_1$. Система имеет единственное решение: $x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ | Прямые — графики уравнений системы пересекаются в одной точке, координаты которой являются решением системы:   |
| **2.** Коэффициенты при неизвестных в уравнениях пропорциональны, т.е. $a_1b_2 = a_2b_1$, но они не пропорциональны свободным членам, т.е. $a_1c_2 \neq a_2c_1$ или $b_1c_2 \neq b_2c_1$. Система не имеет решений. | Прямые — графики уравнений системы параллельны:   |
| **3.** Коэффициенты при неизвестных и свободные члены в уравнениях пропорциональны, т.е. $a_1b_2 = a_2b_1$, $a_1c_2 = a_2c_1$, $b_1c_2 = b_2c_1$. Система имеет бесконечно много решений: решениями является любая пара $(x; y)$, удовлетворяющая одному (любому) уравнению системы. | Прямые — графики уравнений системы совпадают:   |

*) Предполагается, что в каждом уравнении системы хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля, т.е. графиком каждого уравнения системы является прямая.

# ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ*)

## ПРОИЗВОДНАЯ

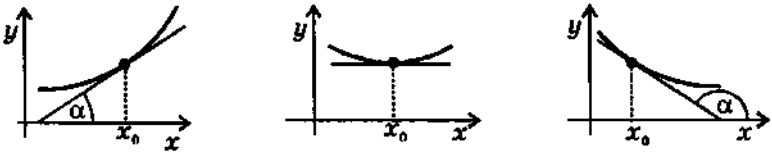
**Производной** функции $f(x)$ в точке $x_0$ называется предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента $\Delta x$ при $\Delta x \to 0$, если этот предел существует:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

***Пример***: $(x^2)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Производная в точке $x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке:



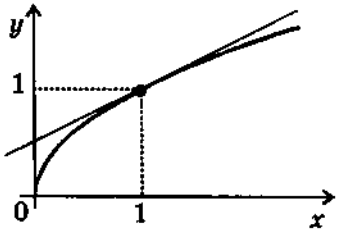

$f'(x_0) = \text{tg}\,\alpha > 0$ $\qquad$ $f'(x_0) = \text{tg}\,\alpha = 0$ $\qquad$ $f'(x_0) = \text{tg}\,\alpha < 0$

## УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ

к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

***Пример***. Нахождение уравнения касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 1$:




1. $f(x_0) = f(1) = 1$
2. $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $f'(x_0) = f'(1) = \dfrac{1}{2}$
4. $y = 1 + \dfrac{1}{2}(x - 1) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

*)Таблицу производных см. на стр. 92.

## ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Второй производной функции $y = f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$ (обозначается $f''(x)$).

## ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Если точка движется вдоль оси $x$ и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то мгновенная скорость точки:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t),$$

а ускорение:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = x''(t)$$

***Пример.*** При свободном падении $x(t) = \frac{gt^2}{2}$, $v(t) = x'(t) = gt$, $a(t) = v'(t) = g$

## ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Если у функций $u(x)$ и $v(x)$ существуют производные, то

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(cu)' = cu'$, где $c$ — const

$(uv)' = u'v + uv'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

### ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Если $y = f(g(x))$ и существуют производные $f'_g$ и $g'_x$, то

$$y'_x = f'_g \quad g'_x,$$

где индексы $g$ и $x$ указывают, по какому аргументу вычисляются производные.

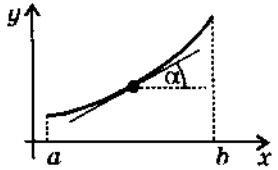
***Примеры:*** 1. $\left(\sqrt{\sin x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \quad (\sin x > 0)$

2. $(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x \quad (\sin x > 0)$

3. $(x^x)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x(\ln x + 1) \quad (x > 0)$

# ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

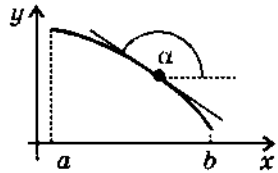
## МОНОТОННОСТЬ




$0 < \alpha < 90$

***Достаточное условие возрастания функции***

Если в каждой точке интервала $(a;\ b)$ $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ монотонно возрастает на этом интервале.



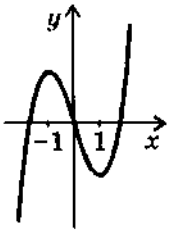

$90 < \alpha < 180$

***Достаточное условие убывания функции***

Если в каждой точке интервала $(a;\ b)$ $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ монотонно убывает на этом интервале.

*Замечание.* Приведенные условия являются только *достаточными* условиями монотонности, но не являются необходимыми. Например, функция $y = x^3$ возрастает во всей области определения, хотя ее производная $y' = 3x^2$ обращается в нуль при $x = 0$.

***Пример исследования функции на монотонность:***

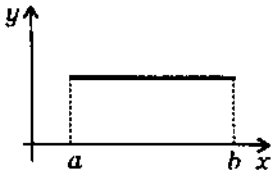



$y = x^3 \quad 3x$

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

$y' > 0$ при $x \in (-\infty;\ -1)$ и при $x \in (1;\ \infty)$, следовательно, при $x \in (-\infty;\ -1)$ и при $x \in (1;\ \infty)$ функция возрастает

$y' < 0$ при $x \in (-1;\ 1)$, следовательно, при $x \in (-1;\ 1)$ функция убывает




***Необходимое и достаточное условие постоянства функции***

Функция $f(x)$ постоянна на интервале $(a;\ b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ в каждой точке этого интервала.

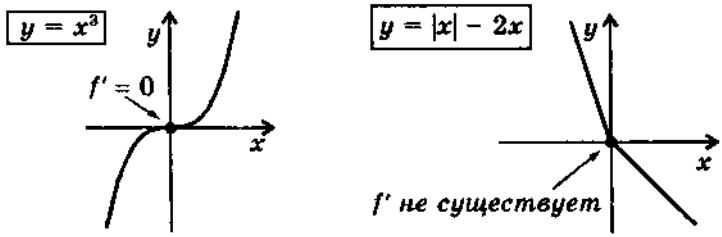
## ЭКСТРЕМУМЫ

### НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

Если $x_0$ — точка экстремума функции $y = f(x)$, то эта точка является *критической* точкой данной функции, т.е. в этой точке производная либо равна нулю, либо она не существует.

*Замечание.* Приведенное условие является только *необходимым* условием экстремума, но не является достаточным: критическая точка не обязательно является точкой экстремума.

***Примеры отсутствия экстремума в критической точке*** $x = 0$:




### ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

Если функция $y$ $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и производная $f'(x)$ меняет знак в этой точке, то $x_0$ — точка экстремума функции $y = f(x)$.

| | |
|---|---|
| Если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$, $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то $x_0$ — точка максимума. | Если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то $x_0$ — точка минимума. |

*Замечание.* В самой точке $x_0$ производной у функции $y = f(x)$ может не существовать.

***Примеры экстремумов:***

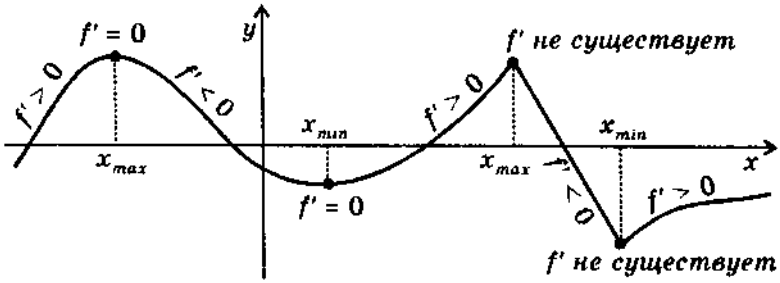


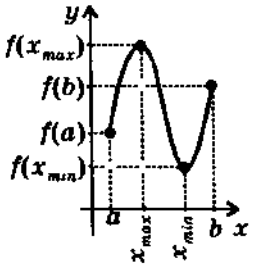
**СХЕМА ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ИНТЕРВАЛОВ МОНОТОННОСТИ И ЭКСТРЕМУМОВ**

| Этапы | Пример для функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$ |
|---|---|
| 1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна. | Обл. определения: $R$<br>Функция непрерывна во всей обл. определения |
| 2. Найти производную $f'(x)$. | $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$ |
| 3. Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная функции равна нулю или не существует. | $f'(x) = 0$<br>при $x = -2$, $x = 3$ |
| 4. В каждом из интервалов, на которые область определения разбивается критическими точками, определить знак производной и характер изменения функции (с помощью достаточных условий монотонности). | *знак f'*: $+$ $-$ $+$<br>$-2$ $3$<br>*характер изменения функции*: ↗ ↘ ↗ |
| 5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума. | $x = -2$<br>точка максимума;<br>$x = 3$<br>точка минимума |
| 6. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы. | $f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -2)$ и при $x \in (3; \infty)$;<br>$f(x)$ убывает при $x \in (-2; 3)$;<br>$x_{max} = -2$,<br>$y_{max} = f(-2) = 49$;<br>$x_{min} = 3$,<br>$y_{min} = f(3) = -76$ |

## НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНОЙ НА ОТРЕЗКЕ

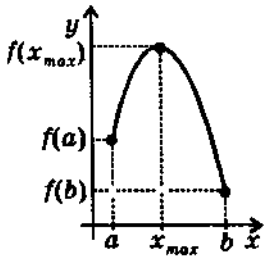
Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах.

***Примеры:***



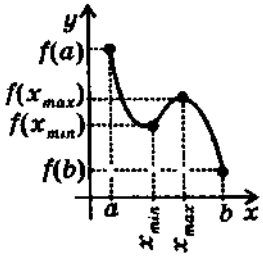

$\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{max})$

$\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{min})$




$\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{max})$

$\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(b)$




$\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(a)$

$\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(b)$

### СХЕМА НАХОЖДЕНИЯ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНОЙ НА ОТРЕЗКЕ

| Этапы | Пример для функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$ на отрезке [0; 4] |
|---|---|
| 1. Найти производную $f'(x)$. | $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$ |
| 2. Найти на данном отрезке критические точки, т.е. точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует. | $f'(x) = 0$ при $x = -2$ и при $x = 3$. Отрезку [0; 4] принадлежит только одна критическая точка: $x = 3$. |
| 3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка. | $f(0) = 5$; $f(3) = -76$; $f(4) = -59$ |
| 4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее. | $\max\limits_{[0;\,4]} f(x) = f(0) = 5$ $\min\limits_{[0;\,4]} f(x) = f(3) = -76$ |

# ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ*)

## ПЕРВООБРАЗНАЯ

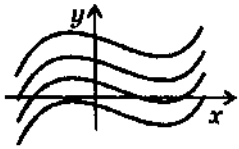
Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на данном промежутке, если для любого $x$ из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

***Пример.*** Первообразной для функции $f(x)$ $x$ на всей числовой оси является $F(x) = x^2/2$, поскольку $(x^2/2)' = x$

### ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ПЕРВООБРАЗНЫХ

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то и функция $F(x) + C$, где $C$ — произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

### ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ




Графики всех первообразных данной функции $f(x)$ получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси $y$.

## НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Совокупность всех первообразных данной функции $f(x)$ называется ее **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$

$\int f(x)dx = F(x) + C$, где $C$ — произвольная постоянная.

## ПРАВИЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, \text{ где } c \text{ — const}$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,\ a \neq 0$$

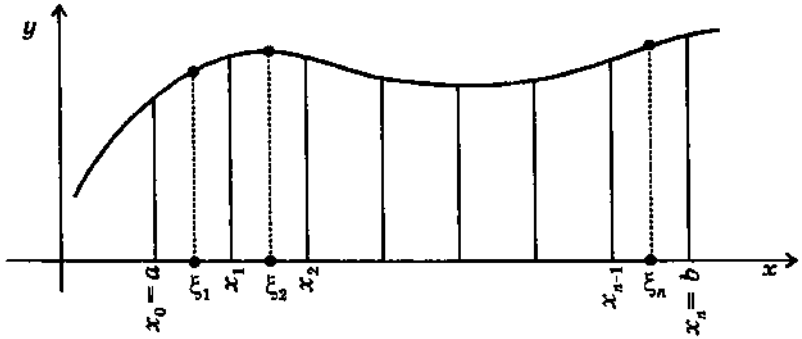
*)Таблицу интегралов см. на стр. 93.

## ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

**Определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ называется предел интегральной суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x$ при $n \to \infty$,

где $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x,$$ где $\xi_k \in [x_{k-1},\ x_k]$ (см. рисунок)




### СВЯЗЬ МЕЖДУ ОПРЕДЕЛЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ И ПЕРВООБРАЗНОЙ (ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА)

Для непрерывной функции

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$.

### ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

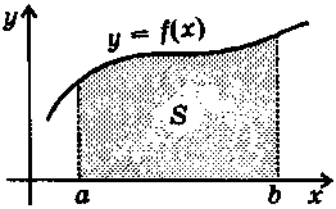
$$\int\limits_a^b dx = b - a$$

$$\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx,$$ где c — const

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$$

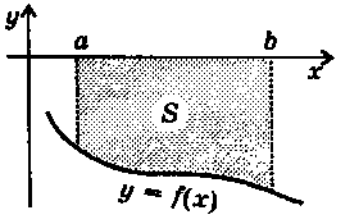
$$\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$$

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА



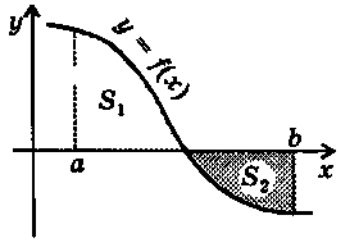

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке $[a;\ b]$ функции $f(x)$, осью $x$ и прямыми $x = a$ и $x = b$:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$




Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной отрицательной на промежутке $[a;\ b]$ функции $f(x)$, осью $x$ и прямыми $x = a$ и $x = b$:

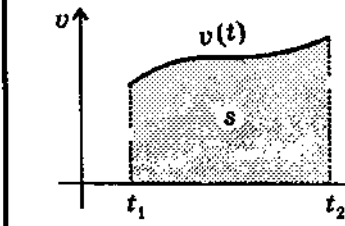
$$S = -\int_a^b f(x)dx$$




*Замечание.* Если функция изменяет знак на промежутке $[a;\ b]$, то

$$S_1 - S_2 = \int_a^b f(x)dx$$

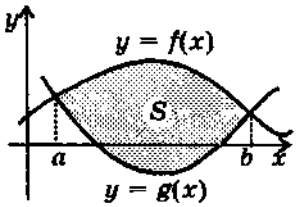
## ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА




При прямолинейном движении перемещение $s$ численно равно площади криволинейной трапеции под графиком зависимости скорости $v$ от времени $t$:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

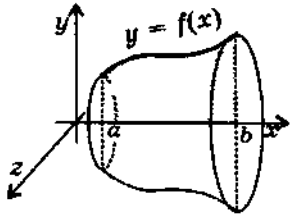
## ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА




**ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ,**

ограниченной графиками непрерывных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ таких, что $f(x) \geqslant g(x)$ для любого $x \in [a; b]$, где $a$ и $b$ — абсциссы точек пересечения графиков функций:

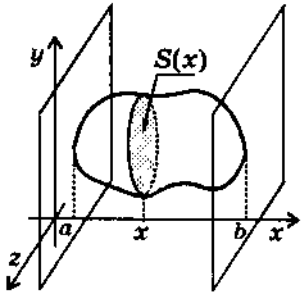
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx .$$




**ОБЪЕМ ТЕЛА,**

полученного в результате вращения вокруг оси $x$ криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx .$$




**ОБЪЕМ ТЕЛА,**

заключенного между двумя перпендикулярными к оси $x$ плоскостями $x = a$ и $x = b$:

$$V = \int_a^b S(x)dx ,$$

где $S(x)$ — площадь сечения плоскостью, проходящей через точку $x \in [a; b]$ и перпендикулярной к оси $x$.

# СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

## ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

| | |
|---|---|
| на 2 | последняя цифра числа четная |
| на 3 | сумма цифр числа делится на 3 |
| на 4 | две последние цифры числа нули или образуют число, делящееся на 4 |
| на 5 | последняя цифра числа 0 или 5 |
| на 6 | число должно делиться на 2 и на 3 (см. соответствующие признаки делимости) |
| на 8 | три последние цифры числа нули или образуют число, делящееся на 8 |
| на 9 | сумма цифр числа делится на 9 |
| на 11 | сумма цифр, стоящих на четных местах, отличается от суммы цифр, стоящих на нечетных местах, на число, кратное 11 |
| на 25 | две последние цифры числа 00, 25, 50 или 75 |

## ТАБЛИЦА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ (до 997)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 79 | 191 | 311 | 439 | 577 | 709 | 857 |
| 3 | 83 | 193 | 313 | 443 | 587 | 719 | 859 |
| 5 | 89 | 197 | 317 | 449 | 593 | 727 | 863 |
| 7 | 97 | 199 | 331 | 457 | 599 | 733 | 877 |
| 11 | 101 | 211 | 337 | 461 | 601 | 739 | 881 |
| 13 | 103 | 223 | 347 | 463 | 607 | 743 | 883 |
| 17 | 107 | 227 | 349 | 467 | 613 | 751 | 887 |
| 19 | 109 | 229 | 353 | 479 | 617 | 757 | 907 |
| 23 | 113 | 233 | 359 | 487 | 619 | 761 | 911 |
| 29 | 127 | 239 | 367 | 491 | 631 | 769 | 919 |
| 31 | 131 | 241 | 373 | 499 | 641 | 773 | 929 |
| 37 | 137 | 251 | 379 | 503 | 643 | 787 | 937 |
| 41 | 139 | 257 | 383 | 509 | 647 | 797 | 941 |
| 43 | 149 | 263 | 389 | 521 | 653 | 809 | 947 |
| 47 | 151 | 269 | 397 | 523 | 659 | 811 | 953 |
| 53 | 157 | 271 | 401 | 541 | 661 | 821 | 967 |
| 59 | 163 | 277 | 409 | 547 | 673 | 823 | 971 |
| 61 | 167 | 281 | 419 | 557 | 677 | 827 | 977 |
| 67 | 173 | 283 | 421 | 563 | 683 | 829 | 983 |
| 71 | 179 | 293 | 431 | 569 | 691 | 839 | 991 |
| 73 | 181 | 307 | 433 | 571 | 701 | 853 | 997 |

## ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

| десятки | единицы | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 100 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 |
| 2 | 400 | 441 | 484 | 529 | 576 | 625 | 676 | 729 | 784 | 841 |
| 3 | 900 | 961 | 1024 | 1089 | 1156 | 1225 | 1296 | 1369 | 1444 | 1521 |
| 4 | 1600 | 1681 | 1764 | 1849 | 1936 | 2025 | 2116 | 2209 | 2304 | 2401 |
| 5 | 2500 | 2601 | 2704 | 2809 | 2916 | 3025 | 3136 | 3249 | 3364 | 3481 |
| 6 | 3600 | 3721 | 3844 | 3969 | 4096 | 4225 | 4356 | 4489 | 4624 | 4761 |
| 7 | 4900 | 5041 | 5184 | 5329 | 5476 | 5625 | 5776 | 5929 | 6084 | 6241 |
| 8 | 6400 | 6561 | 6724 | 6889 | 7056 | 7225 | 7396 | 7569 | 7744 | 7921 |
| 9 | 8100 | 8281 | 8464 | 8649 | 8836 | 9025 | 9216 | 9409 | 9604 | 9801 |

## ПРОПОРЦИИ*)

### СВОЙСТВА ПРОПОРЦИЙ

1. Произведение крайних членов равно произведению средних, т.е. если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $ad = bc$

2. В пропорции, все члены которой отличны от нуля, можно менять местами средние и крайние члены пропорции, т.е. если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОПОРЦИИ,
полученные из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$:

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c} \qquad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} \qquad \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{am_1 + bn_1}{am_2 + bn_2} = \frac{cm_1 + dn_1}{cm_2 + dn_2}, \qquad \frac{am_1 + cn_1}{am_2 + cn_2} = \frac{bm_1 + dn_1}{bm_2 + dn_2},$$

где $m_1$, $m_2$, $n_1$, $n_2$ — произвольные числа.

*) Во всех приведенных формулах знаменатели не должны равняться нулю.

## МНОГОЧЛЕНЫ

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

Для $n \in N$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \quad + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Если $n$ — четное,

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \quad + ab^{n-2} - b^{n-1})$$

Если $n$ — нечетное,

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \quad - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

### БИНОМ НЬЮТОНА

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из $n$ по $k$.

## МОДУЛЬ ЧИСЛА

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}, \quad |a| = \sqrt{a^2}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\lvert a\rvert \geq 0$; | $\lvert a \cdot b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$ | $\lvert a + b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$ |
| $\lvert a\rvert = 0 \Leftrightarrow a = 0$ | $\left\lvert \dfrac{a}{b} \right\rvert = \dfrac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}, \; b \neq 0$ | $\lvert a - b\rvert \geq \lvert\lvert a\rvert - \lvert b\rvert\rvert$ |

## ПРОГРЕССИИ

| АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ | ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ |
|---|---|
| $a_{n+1} = a_n + d$, где $d$ – разность прогрессии | $b_{n+1} = b_n \quad q$, где $q \neq 0$ – знаменатель прогрессии |

**Формулы $n$-го члена**

| | |
|---|---|
| $a_n = a_1 + (n-1)d$ | $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ |
| $a_n = a_k + (n-k)d$ | $b_n = b_k \cdot q^{n-k}$ |
| $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ | $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$ |

**Формулы суммы первых $n$ членов**

| | |
|---|---|
| $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ | $S_n = b_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} = b_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1}$, $q \neq 1$ <br> $S_n = b_1 \quad n$, $q = 1$ |

| **Формула для разности** | **Формула для знаменателя** |
|---|---|
| $d = a_{n+1} - a_n$ | $q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ |

**Если $n + m = k + p$, то**

| | |
|---|---|
| $a_n + a_m = a_k + a_p$ | $b_n \quad b_m = b_k \cdot b_p$ |

| Сумма последовательных натуральных чисел от 1 до $n$: | Сумма бесконечно убывающей геометрической прогресии: |
|---|---|
| $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$ | $S = \dfrac{b_1}{1-q}$, $\lvert q \rvert < 1$ |

## ПРОСТЕЙШИЕ НЕРАВЕНСТВА*)

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab; \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2, \; ab > 0$$

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \; a \geqslant 0, \; b \geqslant 0$$

(Среднее арифметическое не меньше среднего геометрического)

*) Равенства в приведенных неравенствах достигаются тогда и только тогда, когда $a = b$.

## АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ

**Арифметическим** корнем $n$-ой степени из неотрицательного числа $a$ называется такое неотрицательное число $b$, $n$-ая степень которого равна $a$, т.е. $\sqrt[n]{a} = b$, если $b^n = a$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$.

## СВОЙСТВА КОРНЕЙ

| | |
|---|---|
| Основное свойство корня | $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$, $a \geqslant 0$ |
| Умножение корней | $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$ |
| Деление корней | $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $a \geqslant 0,\ b > 0$ |
| Возведение корня в степень | $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, $a \geqslant 0$ |
| Извлечение корня из корня | $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, $a \geqslant 0$ |
| Вынесение множителя из-под знака корня | $\sqrt[2n]{a^{2n}b} = \lvert a \rvert \cdot \sqrt[2n]{b}$, $b \geqslant 0$<br>в частности, $\sqrt{a^2b} = \lvert a \rvert \sqrt{b}$<br>$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}b} = a \cdot \sqrt[2n+1]{b}$ |
| Внесение множителя под знак корня | $a \cdot \sqrt[2n]{b} = \begin{cases} \sqrt[2n]{a^{2n}b}, (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0) \\ -\sqrt[2n]{a^{2n}b}, (a < 0,\ b \geqslant 0) \end{cases}$<br>$a \cdot \sqrt[2n+1]{b} = \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}b}$ |

## СТЕПЕНИ

| | |
|---|---|
| С натуральным показателем | $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$, $a^1 = a$ |
| С положительным дробным показателем | $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a \geqslant 0,\ m, n \in N$ |
| С нулевым показателем | $a^0 = 1$, где $a \neq 0$ |
| С отрицательным рациональным показателем | $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$, где $a > 0$ |
| Умножение степеней | $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$; $a^p \cdot b^p = (ab)^p$ |
| Деление степеней | $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$; $\dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$ |
| Возведение степени в степень | $(a^p)^q = a^{pq}$ |

## ЛОГАРИФМЫ

**Логарифмом** положительного числа $b$ по основанию $a$ ($a > 0$, $a \neq 1$) называется такой показатель степени $c$, в которую надо возвести число $a$, чтобы получить число $b$:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

### СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ*)

- Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$, $b > 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- Логарифм произведения: $\log_a xy = \log_a|x| + \log_a|y|$, $xy > 0$
- Логарифм частного: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$, $\frac{x}{y} > 0$
- Логарифм степени: $\log_a x^p = p\log_a|x|$, $x^p > 0$

  $\log_{a^q} x^p = \frac{p}{q}\log_a|x|$, $x^p > 0$
- Логарифм корня: $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$, $x > 0$
- Формула перехода к другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ где } b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ где } b > 0,\ b \neq 1$$

*) Во всех приведенных формулах $a > 0$, $a \neq 1$

## ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

Число *перестановок* из $n$ элементов:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ \cdot n$$

Число *размещений* из $n$ элементов по $k$ элементов:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Число *сочетаний* из $n$ элементов по $k$ элементов:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ \cdot k}$$

# ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ*)

## СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ АРГУМЕНТА

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

## ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \qquad \operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \qquad \operatorname{ctg}(x - y) = -\frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y}$$

## ВЫРАЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО УГЛА

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

*)Во всех формулах, приведенных в этом разделе, следует учитывать область допустимых значений левой и правой частей формул.

**ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО АРГУМЕНТА**

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{2}$$

**ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА**

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \qquad \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \qquad \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

**ФОРМУЛЫ ТРОЙНОГО АРГУМЕНТА**

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3\operatorname{ctg} x}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1}$$

## ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y} \qquad \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y} \qquad \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{\sin(x-y)}{\sin x\sin y}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{\cos(x+y)}{\cos x\sin y}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = -2\operatorname{ctg} 2x$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(45^\circ - x) = \sqrt{2}\sin(45^\circ + x)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin(45^\circ - x) = \sqrt{2}\cos(45^\circ + x)$$

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi),$$

где $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

## ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В СУММУ

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

## ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

| угол / функция | $\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ | $\beta = \pi \pm \alpha$ | $\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ | $\beta = 2\pi \pm \alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\beta$ | $\cos\alpha$ | $\mp\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\pm\sin\alpha$ |
| $\cos\beta$ | $\mp\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\pm\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ |
| $\mathrm{tg}\,\beta$ | $\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\pm\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\pm\mathrm{tg}\,\alpha$ |
| $\mathrm{ctg}\,\beta$ | $\mp\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\mp\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$ |

## ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

| Угол в градусах | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Угол в радианах | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 |
| $\mathrm{tg}\,\alpha$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | не сущ. | 0 | не сущ. | 0 |
| $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | не сущ. | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | не сущ. | 0 | не сущ. |

## СВОЙСТВА ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \qquad |a| \le 1$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \qquad |a| \le 1$$

$$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a, \qquad a \in \mathrm{R}$$

$$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a, \qquad a \in \mathrm{R}$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \qquad |a| \le 1$$

$$\mathrm{arctg}\, a + \mathrm{arcctg}\, a = \frac{\pi}{2}, \qquad a \in R$$

## НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЫ

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$ |
| $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0$ |
| $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ |

## ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

| Функция | Производная |
|---|---|
| $f(x)=c$ | $c'=0$, где $c$ — const |
| $f(x)=x^\alpha$ | $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $f(x)=e^x$ | $(e^x)'=e^x$ |
| $f(x)=a^x$ | $(a^x)'=a^x\ln a$ |
| $f(x)=\ln x$ | $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ |
| $f(x)=\log_a x$ | $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ |
| $f(x)=\sin x$ | $(\sin x)'=\cos x$ |
| $f(x)=\cos x$ | $(\cos x)'=-\sin x$ |
| $f(x)=\operatorname{tg} x$ | $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ |
| $f(x)=\operatorname{ctg} x$ | $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ |
| $f(x)=\arcsin x$ | $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $f(x)=\arccos x$ | $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $f(x)=\operatorname{arctg} x$ | $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ |
| $f(x)=\operatorname{arcctg} x$ | $(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$ |

## ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

$$\int 0 \cdot dx = C$$

$$\int 1 \cdot dx = x + C$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + C \\ -\arccos\frac{x}{a} + C \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

## ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Уравнение радиоактивного распада:* $y' = -ay$

$y = Ce^{-ax}$, где $C$ — произвольная постоянная.

*Уравнение гармонических колебаний:* $y'' = -\omega^2 y$

$y = A\cos(\omega x + \varphi)$, где $A$ и $\varphi$ — произвольные постоянные.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аргумент 6
асимптота 10
— вертикальная 10
— горизонтальная 10
— наклонная 10
Возрастание функции 9
— — , достаточное условие 74
выделение полного квадрата 26, 30
График функции, определение 6
графики сложных функций, построение 20-21
— функций, преобразования 12-21
Дискриминант 26
дифференцирования правила 73
Интеграл неопределенный 78
— определенный 79
— определенный, вычисление площадей и объемов 81
— определенный, геометрический смысл 80
— определенный, физический смысл 80
интегрирования правила 78
Касательная к графику функции, уравнение 72
квадратов таблица 83
комбинаторика, основные формулы 87
корень арифметический 86
корень уравнения 44
Логарифмы 87
Максимум 9
минимум 9
многочлены 84
модуль числа 84
монотонность функции 9
Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке 77
неравенства 57-66
— дробно-рациональные, метод интервалов 61
— иррациональные 62
— квадратные 59
— линейные 58
— логарифмические 63
— показательные 63
— тригонометрические, простейшие 64-66
— числовые 85
неравенства, метод интервалов 60

нуль функции 8
Область допустимых значений уравнения 44
объемы тел, вычисление с помощью определенного интеграла 81
Первообразная 78
период функции 8
площади поверхностей, вычисление с помощью определенного интеграла 81
постоянства функции необходимое и достаточное условие 74
признаки делимости 82
прогрессия арифметическая 85
— геометрическая 85
производная 72-77
— сложной функции 73
— вторая 73
— , геометрический смысл 72
— , применение к исследованию функций 74-77
— , физический смысл 73
производные элементарных функций, таблица 92
пропорции 83
пропорциональность обратная 33
— прямая 22
простых чисел таблица 82
Разложение квадратного трехчлена на линейные множители 26
Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными 71
— — уравнений с двумя неизвестными 67-71
— — уравнений с двумя неизвестными, графический метод решения 70
— — уравнений с двумя неизвестными, метод подстановки 68
— — уравнений с двумя неизвестными, метод сложения 69
сокращенного умножения формулы 84
способы задания функции 6
степени 86
Тригонометрические формулы 88-91
Убывание функции 9
— — , достаточное условие 74
угловой коэффициент прямой 22
уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ 54
уравнения 44-56

уравнения иррациональные 50
— квадратные 46-48
— — неполные 47
— — приведенные 48
— линейные 45
— логарифмические, простейшие 51
— показательные, простейшие 51
— равносильные 44
— с двумя переменными и их графики 55-56
— тригонометрические, простейшие 52-54
уравнения, сводящиеся к квадратным 49
Формула Ньютона-Лейбница 79
формулы Виета для корней квадратного уравнения 48
функции 6-43
— $y = \sqrt[3]{x}$ 34
— , область значений 6
— обратные тригонометрические 42-43
— степенные с действительными показателями степени 35
— степенные с натуральными показателями степени 32
— степенные с целыми отрицательными показателями степени 33
— тригонометрические 38-42
функция, область значений 6
— , область определения 6
функция возрастающая 9
— Дирихле 6
— квадратичная 26-31
— квадратичная, график 28-31
— линейная 22-25
— логарифмическая 37
— нечетная 7, 13
— обратная 11
— обратная, график 19
— обратная, формула 11
— периодическая 8, 14
— показательная 36
— убывающая 9
— четная 7
Экстремум 9
экстремума достаточное условие 75
экстремума необходимое условие 75